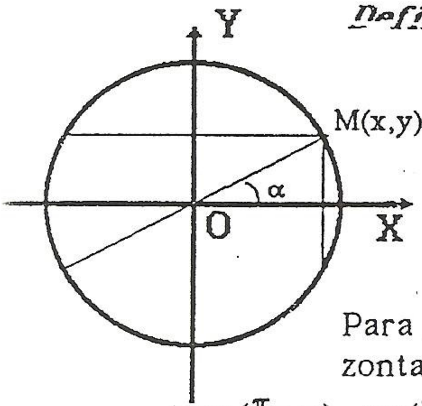
APÉNDICES

1. Trigonometría.
2. Áreas de figuras planas; áreas totales de las figuras en el espacio y volúmenes de figuras geométricas en el espacio.
3. Alfabeto griego y términos matemáticos muy usados.
4. Números complejos.
5. Criterios de semejanza de triángulos. Definiciones.
6. Teorema del coseno. Teorema del seno. Teorema del cateto. Teorema de la altura.

T-1

APÉNDICE 1

Trigonometría



Definiciones:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}$ $\qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r}{y}$ $\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x}{y}$

Relación entre las razones trigonométricas de angulos de distinto cuadrante.

Para pasar del segundo cuadrante al primero trazamos una horizontal, obteniendo:

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

Para pasar del tercer cuadrante al primero unimos con el origen O, resultándonos:

$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

Para pasar del cuarto cuadrante al primero, trazamos una vertical, para darnos:

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Razones de algunos ángulos

	0°	30°=π/6	45°=π/4	60°=π/3	90°=π/2
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Fórmulas fundamentales.

$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ $\qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad 1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

Suma y diferencia de ángulos.

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a\cos b + \cos a\operatorname{sen}b$

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a\cos b - \cos a\operatorname{sen}b$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$

$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$

Ángulo doble.

$\operatorname{sen}2a = 2\operatorname{sen}a\cos a$ $\qquad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ " $= 2\cos^2 a - 1$ $\qquad \operatorname{tg}2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Ángulo mitad. De las fórmulas de cos 2a se deducen:

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\qquad \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Transformación de sumas en productos.

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Progresiones aritméticas

$$a_i=a_{i-1}+r \qquad a_n=a_1+(n-1)r \qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}.n$$

Progresiones geométricas

$$a_i=a_{i-1}.r \qquad a_n=a_1.r^{n-1} \qquad S_n=\frac{a_n.r-a_1}{r-1} \qquad S_\infty=\frac{a_1}{1-r},\ \text{si } |r|<1$$

Binomio de Newton

```
      1  1
    1  2  1
   1  3  3  1
  1  4  6  4  1
1  5  10 10  5  1
. . . . . . . . . . .
```

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}.b+\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}.b+\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

$$\text{siendo } \binom{n}{m}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)}^{m\text{ factores}}}{m!}$$

Logaritmos

$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y$ — $\ln a$, si $a<0$, no existe

$\log_b\frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$ — $\ln a$ es negativo, si $a<1$

$\log_b x^y=y.\log_b x$ — $\ln 1=0$

$\log_b\sqrt[y]{x}=\frac{1}{y}.\log_b x$ — $\ln a=-\infty$, si $a\to 0$ con $a>0$

$\log_b a=\frac{\log_B a}{\log_B b}=\frac{\ln a}{\ln b}$ — $\ln e^a=a$ — $e^{\ln a}=a$

Funciones hiperbólicas

$$Shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad Chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad Ch^2x-Sh^2x=1$$

$$Sh(x+y)=Shx\,Chy+Chx\,Chy \qquad Ch(x+y)=Chx\,Chy+Shx\,Shy$$

$$Ch2x=Ch^2x+Sh^2x \qquad Sh^2x=\frac{Ch2x-1}{2} \qquad Ch^2x=\frac{Ch2x+1}{2}$$

Algunos productos notables

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y) \qquad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

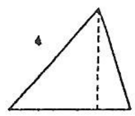
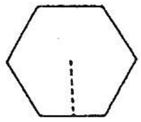
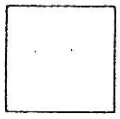
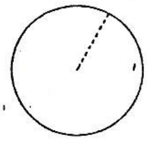
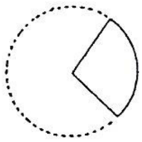
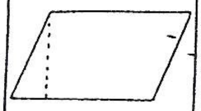
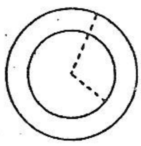
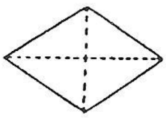
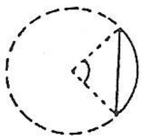
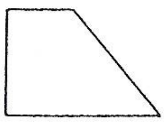
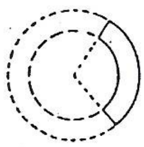
$$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \qquad x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

y en general $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1})$

AV.- 1

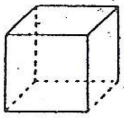
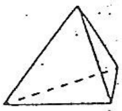
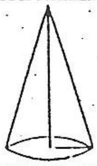
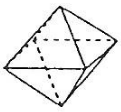
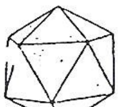
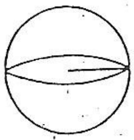
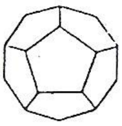
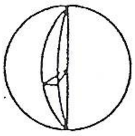
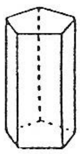
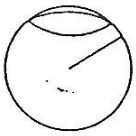
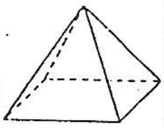
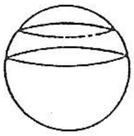
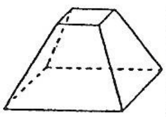
APÉNDICE 2

Áreas de las figuras planas

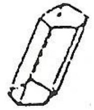
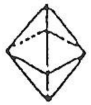
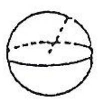
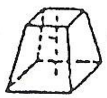
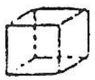
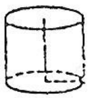
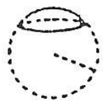
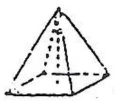
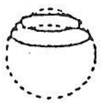
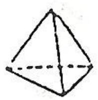
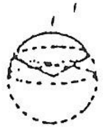
	Área del triángulo: $\text{Área} = \frac{B \cdot h}{2}$		Área de un polígono regular: $\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2}$
	Área del cuadrado: $\text{Área} = l^2$		Área del círculo: $\text{Área} = \pi R^2$
	Área del rectángulo: $\text{Área} = B \cdot h$		Área del sector circular: $\text{Área} = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360}$
	Área del romboide: $\text{Área} = B \cdot h$		Área de la corona: circular $\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$
	Área del rombo: $\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$		Área del segmento: circular: Área = Área del sector circular − Área del triángulo
	Área del trapecio: $\text{Área} = \frac{(B + b) \cdot \text{h}}{2}$		Área del trapecio: circular: $\text{Área} = \frac{\pi(R^2 - r^2)n}{360}$

AV.-2

Área totales de figuras en el espacio:

	Cubo $A = 6a^2$		Cilindro $A = 2\pi \cdot (h + r)$
	Tetraedro regular $A = a^2\sqrt{3}$		Cono $A = \pi r \cdot (g + r)$
	Octaedro regular $A = 2a^2\sqrt{3}$		Tronco de cono $A = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2]$
	Icosaedro regular $A = 5a^2\sqrt{3}$		Esfera $A = 4\pi R^2$
	Dodecaedro regular $A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$		Huso esférico $A = \frac{4\pi R^2}{360} \cdot n^0$
	Prisma recto $A = P \cdot (h + a)$		Casquete esférico $A = 2\pi R \cdot h$
	Pirámide recta $A = \frac{1}{2} P \cdot (a + a')$		Zona esférica $A = 2\pi R \cdot h$
	Tronco de primámide recta $A = \frac{1}{2}(P + P') \cdot a + A_b + A_h$		

volúmenes de figuras geométricas en el espacio

	Prisma $V = A_b \cdot h$		Octaedro regular $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$		Esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
	Ortoedro $V = a \cdot b \cdot c$		Tronco de pirámide $V = \frac{1}{3}h(A_b + A_b + \sqrt{A_b \cdot A_b})$ A_b, A_b áreas de las bases		Cuña esférica $V = \frac{4/3\ \pi R^3}{360} n^0$
	Cubo $V = l^3$		Cilindro $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$		Segmento esférico de una base $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$
	Pirámide $V = \frac{1}{3}A_b \cdot h$		Cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$		Segmento esférico de dos bases $V = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2 + 3r^2)$
	Tetraedro regular $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$		Tronco de cono $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$		Sector esférico $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

APÉNDICE 3

Alfabeto Griego

Nombre Griego	Letra Griega	
	Minús.	Mayús.
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M

Nombre Griego	Letra Griega	
	Minús	Mayús
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicrón	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Y
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

TÉRMINOS MATEMÁTICOS MUY USADOS

PARADOJA: *Demostración correcta en apariencia pero que conduce a contradicciones; esto afecta frecuentemente a la aplicación de los razonamientos a casos en que no pueden aplicarse o a la utilización de un término cuya significación no es la misma en toda la demostración. Por extensión, algunos teoremas sorprendentes en apariencia se califican a veces, incorrectamente, de paradojas.*

PROPOSICIÓN: *Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar.*

AXIOMA: *Para los matemáticos griegos y para muchos matemáticos hasta el siglo XVIII, un axioma era una proposición evidente para todos, de suerte que se admitía y no exigía ninguna demostración. En la actualidad, se considera que la base de una teoría matemática está constituida por "primeras nociones" (términos primitivos, por ejemplo la noción de pertenencia de un elemento a un conjunto, la noción de inclusión de un conjunto en otro, etc.) y de axiomas que son relaciones entre las "primeras nociones", es decir, proposiciones que se admiten como verdaderas y que se escogen arbitrariamente a condición de que no sean contradictorias.*

POSTULADO: *Antiguamente se distinguían los axiomas de los postulados. En ambos casos, se trataba de proposiciones admitidas sin demostración. Se denominaban axiomas a aquéllos considerados como evidentes y postulados a los otros que el lector debía admitir, pero que podían ser candidatos a una demostración si esta se encontraba. En la actualidad, esta distinción ya no se hace y la palabra postulado se emplea cada vez menos.*

DEFINICIÓN: *Termino no matemático. Los axiomas y los elementos primitivos de una teoría se manifestaron rápidamente insuficientes en la práctica para enunciar simplemente los teoremas. Entonces fue preciso introducir abreviaturas, y se llama definición de un término matemático a toda proposición de la que él es una abreviación.*

LEMA: *Proposición que es preciso demostrar antes de demostrar un teorema para conseguir que la demostración de dicho teorema no sea demasiado larga.*

TEOREMA: *(Enunciado verdadero) Proposición, por medio de la cual, partiendo de un supuesto (hipótesis), se afirma una verdad (tesis) que no es evidente por sí misma y que hay que demostrar.*

COROLARIO: *Nombre que a veces se da a ciertos teoremas que son consecuencia inmediata de otro teorema que es considerado más importante.*

TEORÍA: *Conjunto de signos, alfabetos, reglas de formación de ensamblajes y de enunciados, axiomas y reglas de deducción que permiten decir que ciertos enunciados son verdaderos (teoremas de la teoría). Ejemplos: Teoría de conjuntos, Teoría de probabilidad, etc.*

 C-1

Números complejos

NUMEROS REALES

[redacted]compone de los correspondientes a los números racionales e irracionales. El conjunto de los números reales se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de una recta que se llama *eje real*: es decir, cada punto de la recta representa un único número real y cualquier número real se representa por un único punto de la recta, como muestra la Fig. 4-1. La suma, resta, multiplicación y división de dos números reales es otro número real. La raíz cuadrada de un número real positivo es también otro número real; pero si es negativo, su raíz cuadrada no es un número real o bien no corresponde a ningún punto de la citada recta.

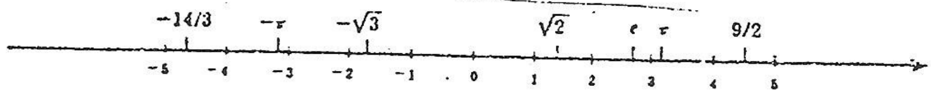


Fig. 4-1. Eje real

NUMEROS IMAGINARIOS

La raíz cuadrada de un número real negativo es un *número imaginario*; por ejemplo, son números imaginarios $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-16}$, etc.

Si hacemos $j = \sqrt{-1}$, que se llama *unidad imaginaria*, se puede escribir, $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = j2$, $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$, $\sqrt{-16} = j4$, etc. Las sucesivas potencias de la unidad imaginaria son

$$j^2 = -1, \quad j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j, \quad j^4 = (j^2)^2 = 1, \quad j^5 = j, \quad \ldots$$

El conjunto de los números imaginarios se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos de otra recta, que se llama *eje imaginario*, como muestra la Figura 4-2.

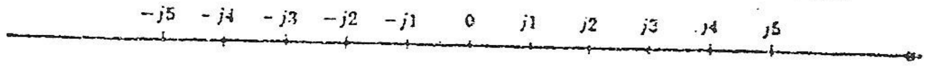


Fig. 4-2. Eje imaginario

La elección de la palabra imaginario es muy desafortunada, pues estos números tienen tanta existencia física como los reales. El vocablo significa, exclusivamente, que los números imaginarios no se pueden representar por un punto en el eje de los números reales.

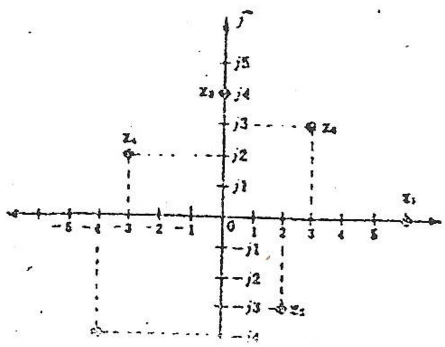
NUMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es de la forma $x + jy$, en donde x e y son números reales y $j = \sqrt{-1}$. En un número complejo $x + jy$ la primera componente, x, se llama parte real y la segunda, jy, parte imaginaria. Si la parte real es nula, $x = 0$, el número complejo se reduce a un número imaginario (puro) y se representa por un punto sobre el eje imaginario. Análogamente, si la que es nula es la parte imaginaria, $y = 0$, el número complejo se reduce a un número real y se representa por un punto del eje real. Por consiguiente, el conjunto de los números reales tiene como subconjuntos al de los números reales y al de los imaginarios.

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos, $a + jb$ y $c + jd$, sean iguales es que $a = c$ y $b = d$.

Si se traza el eje real perpendicular al eje imaginario, como se representa en la Fig. 4-3, siendo 0 el punto de intersección llamado origen, el conjunto de los números complejos se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos del plano complejo así formado. En dicha Fig. 4-3, se han situado los seis números complejos $(z_1, \ldots, z_6)$ que aparecen a su izquierda.

$z_1 = 6$
$z_2 = 2 - j3$
$z_3 = j4$
$z_4 = -3 + j2$
$z_5 = -4 - j4$
$z_6 = 3 + j3$



DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR UN NUMERO COMPLEJO

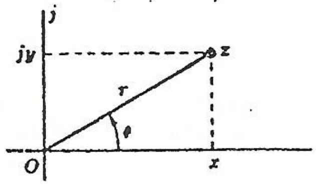
En la Fig. 4-4, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con lo que el número complejo **z** es

$$z = x + jy = r(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

en donde la expresión $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama *módulo* de **z**, y el ángulo $\theta = \mathrm{arc\,tg}\,y/x$ recibe el nombre de *argumento* de **z**.

La fórmula de Euler, $e^{j\theta} = (\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$, permite expresar en otra forma, que se llama exponencial, un número complejo (véase Problema 4-1).

$$z = r\cos\theta + jr\,\mathrm{sen}\,\theta = re^{j\theta}$$



Representación polar de un número complejo z

Fig. 4-4

En teoría de circuitos es muy frecuente emplear la forma polar o de Steinmetz de un número complejo **z** y se suele escribir así:

$$r\underline{/\theta}$$

en donde θ se mide en grados o en radianes.

A continuación se resumen las cuatro formas de representar un número complejo; el empleo de una u otra depende, fundamentalmente, de la operación que se trate de efectuar.

Forma binómica	$z = x + jy$
Forma polar o de Steinmetz	$z = r\underline{/\theta}$
Forma exponencial	$z = re^{j\theta}$
Forma trigonométrica	$z = r(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$

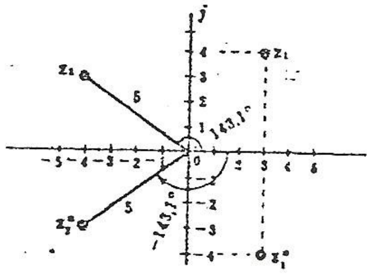
CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

El conjugado del número complejo $z = x + jy$ es el complejo $z^* = x - jy$. Por ejemplo, son números complejos conjugados los pares: (*1*) $3 - j2$ y $3 + j2$, (*2*) $-5 + j4$ y $-5 - j4$.

En forma polar, el conjunto de $z = r\underline{/\theta}$ es $z^* = r\underline{/-\theta}$. Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$, el conjugado de $z = r(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$ es $z^* = r(\cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Por ejemplo, el conjugado de $z = 7\underline{/30°}$ es $z^* = 7\underline{/-30°}$.

En el plano complejo, el conjugado z^* de un número complejo **z** es siempre el simétrico de **z** respecto del eje real, como se muestra en la Figura 4-5.

Por consiguiente, las cuatro formas de escribir un número complejo **z** y su conjugado correspondiente son:



$z_1 = 3 + j4$, $z_1^* = 3 - j4$
$z_2 = 5\underline{/143.1°}$, $z_2^* = 5\underline{/-143.1°}$

Fig. 4-5. Números complejos y sus conjugados

$z = x + jy$	$z = r\underline{/\theta}$	$z = re^{j\theta}$	$z = r(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta)$
$z^* = x - jy$	$z^* = r\underline{/-\theta}$	$z^* = re^{-j\theta}$	$z^* = r(\cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta)$

SUMA Y RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS

Para sumar (restar) dos números complejos se suman (restan) sus partes reales y sus partes imaginarias independientemente. En la práctica, para sumar (restar) complejos lo más cómodo es escribirlos en forma binómica.

Ejemplo 1. Sean los complejos $z_1 = 5 - j2$ y $z_2 = -3 - j8$. Entonces,

$$z_1 + z_2 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$
$$z_2 - z_1 = (-3-5) + j(-8+2) = -8 - j6$$

MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

El producto de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$z_1 z_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1 r_2\underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplican como si fueran polinomios.

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Ejemplo 2. Si $z_1 = 5e^{j\pi/3}$ y $z_2 = 2e^{-j\pi/6}$, resulta $z_1z_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

Ejemplo 3. Si $z_1 = 2\underline{/30^\circ}$ y $z_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, resulta $z_1z_2 = (2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-45^\circ}) = 10\underline{/-15^\circ}$.

Ejemplo 4. Si $z_1 = 2 + j3$ y $z_2 = -1 - j3$, resulta $z_1z_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$.

DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

El cociente de dos números complejos, escritos en forma exponencial, se deduce inmediatamente de las propiedades de la potenciación.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Si los complejos se escriben en forma polar es evidente que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

Por último, si los complejos vienen dados en forma binómica se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejemplo 5. Sean $z_1 = 4e^{j\pi/3}$ y $z_2 = 2e^{j\pi/6}$; entonces $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$.

Ejemplo 6. Sean $z_1 = 8\underline{/-30^\circ}$ y $z_2 = 2\underline{/-60^\circ}$; entonces $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{8\underline{/-30^\circ}}{2\underline{/-60^\circ}} = 4\underline{/30^\circ}$.

Ejemplo 7. Sean $z_1 = 4 - j5$ y $z_2 = 1 + j2$; entonces $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4 - j5}{1 + j2}\left(\dfrac{1 - j2}{1 - j2}\right) = \dfrac{-6 - j13}{5}$.

RAIZ DE UN NUMERO COMPLEJO

Cualquier número complejo dado en la forma $z = r\,e^{j\theta}$ equivale a escribir $z = r\,e^{j(\theta + 2\pi n)}$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Análogamente, $z = r\underline{/\theta}$ es equivalente a $z = r\underline{/(\theta + n360^\circ)}$. Por consiguiente,

$$z = r\,e^{j\theta} = r\,e^{j(\theta + 2\pi n)} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r}\,e^{j(\theta + 2\pi n)/k}$$
$$z = r\underline{/\theta} = r\underline{/(\theta + n360^\circ)} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{r}\underline{/(\theta + n360^\circ)/k}$$

Dando a k los valores $0, 1, 2, 3, \ldots, (k - 1)$, se deducen las k raíces distintas que posee un número complejo.

Ejemplo 8.

Si $z = 8\underline{/60^\circ}$, se deduce que $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\underline{/(60^\circ + n360^\circ)/3} = 2\underline{/(20^\circ + n120^\circ)}$. Como n se le pueden dar los valores 0, 1 y 2 se obtienen las tres raíces $2\underline{/20^\circ}$, $2\underline{/140^\circ}$ y $2\underline{/260^\circ}$.

Ejemplo 9. Hallar las raíces quintas de la unidad (real).

Como $1 = 1e^{j2\pi n}$, se tiene $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\,e^{j2\pi n/5} = 1e^{j2\pi n/5}$. Como n se le pueden dar los valores 0, 1, 2, 3 y 4, las cinco raíces quintas son $1\underline{/0^\circ}$, 1, $1\underline{/72^\circ}$, $1\underline{/144^\circ}$, $1\underline{/216^\circ}$ y $1\underline{/288^\circ}$.

LOGARITMO DE UN NUMERO COMPLEJO

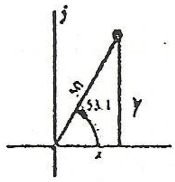
El logaritmo neperiano o natural de un número complejo se halla muy fácilmente si éste se escribe en forma exponencial.

$$\ln z = \ln r\,e^{j(\theta + 2\pi n)} = \ln r + \ln e^{j(\theta + 2\pi n)} = \ln r + j(\theta + 2\pi n)$$

El resultado que se obtiene, pues, no es único. Se llama valor principal del logaritmo al que corresponde a $n = 0$, y es el que se considera con más frecuencia.

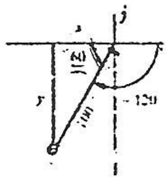
PASO DE FORMA POLAR A BINOMICA

Ejemplo 11. Expresar $50\underline{/53.1^\circ}$ en forma binómica, $x + jy$.



1. Se hace un «mono» o dibujo expresando el hecho de que el ángulo es mayor de 45°.
2. $x = 50 \cos 53.1^\circ = 50 \times 0.600 = 30.$
   $y = 50 \operatorname{sen} 53.1^\circ = 50 \times 0.800 = 40.$
3. Las partes real e imaginaria son ambas positivas.
4. $50\underline{/53.1^\circ} = 30 + j40.$

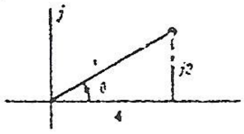
Ejemplo 12. Expresar $100\underline{/-120}$ en forma binómica, $x + jy$.



1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia es 60°.
2. $x = 100 \cos 60^\circ = 100 \times 0.500 = 50.$
   $y = 100 \operatorname{sen} 60^\circ = 100 \times 0.866 = 86.6.$
3. Las partes real e imaginaria son ambas negativas.
4. $100\underline{/-120} = -50 - j86.6.$

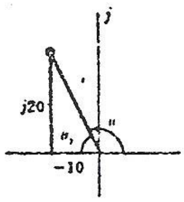
PASO DE FORMA BINOMICA A POLAR

Ejemplo 13. Expresar $4 + j3$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.



1. Se hace un «mono» o dibujo exagerando el hecho de que la parte real es mayor que la parte imaginaria, es decir, el ángulo es *menor* de 45°.
2. $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} = \operatorname{arc\,tg} 0.75 = 36.9^\circ$ $(<45^\circ)$ $\operatorname{sen} 36.9^\circ = 0.600$, de donde $r = \frac{3}{0.600} = 5$ o bien $\cos 36.9^\circ = 0.800$, de donde $r = \frac{4}{0.800} = 5.$
3. $4 + j3 = 5\underline{/36.9^\circ}.$

Ejemplo 14. Expresar $-10 + j20$ en forma polar, $r\underline{/\theta}$.



1. Se dibuja el «mono» correspondiente. El ángulo de referencia θ_1 es menor de 45° (complementario de θ).
2. $\theta_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{20}{10} = \operatorname{arc\,tg} 2 = 63.4^\circ$. Por tanto, $= 180^\circ - 63.4^\circ = 116.6^\circ$.
   $\operatorname{sen} 63.4^\circ = 0.895$, de donde $r = \frac{20}{0.895} = 22.4$ o bien $\cos 63.4^\circ = 0.449$, de donde $r = \frac{10}{0.449} = 22.4.$
3. $-10 + j20 = 22.4\underline{/116.6^\circ}.$

Fórmula de Moivre:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

APÉNDICE 5

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1º.- Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

$$\hat{B} = \hat{B'} \; ; \; \hat{C} = \hat{C'}$$

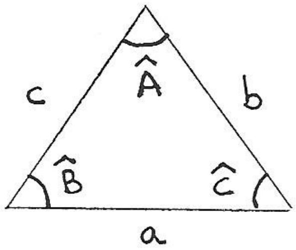


Figura 1

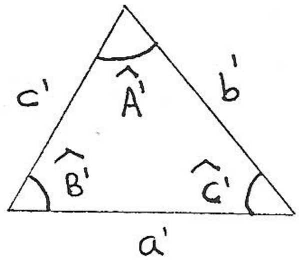


Figura 2

2º.- Dos triángulos, (Ver Figura 1; Figura 2), son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual uno de sus ángulos.

$$\boxed{\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \hat{A} = \hat{A'}}$$

3º.- Dos triángulos, (Ver Figura 1; Figura 2), son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

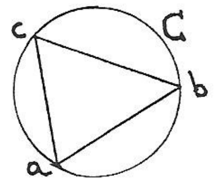
$$\boxed{\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}}$$

DEFINICIONES

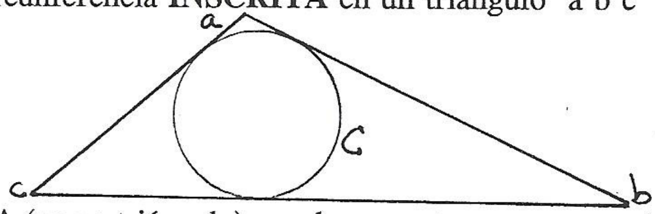
* **MEDIATRIZ** de un segmento, es la recta perpendicular a él por el punto medio.

* **CIRCUNCENTRO:** Punto de corte de las tres mediatrices de un triángulo.

* C es la circunferencia **CIRCUNSCRITA** al triángulo $\widehat{a\,b\,c}$



* C es la circunferencia **INSCRITA** en un triángulo $\widehat{a\,b\,c}$



* **MEDIANA** (en un triángulo), es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

* **BARICENTRO:** Punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo.

* **BISECTRIZ** (de un ángulo), es la recta que pasa por un vértice dividiéndolo en dos ángulos iguales.

* **INCENTRO:** Punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo.

* **ALTURA** (de un triángulo), es el segmento perpendicular desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

* **ORTOCENTRO:** Punto de corte de las tres alturas de un triángulo.

* **TRIÁNGULO RECTÁNGULO:** Es el triángulo que tiene un ángulo recto.

APÉNDICE 6

<u>TEOREMA DEL COSENO</u>: El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

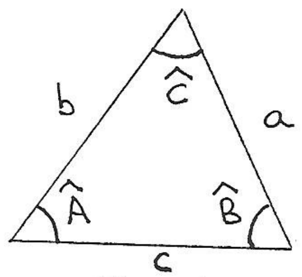


Figura 1

<u>TEOREMA DEL SENO</u>: Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{Sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{Sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{Sen}\hat{C}}}$$

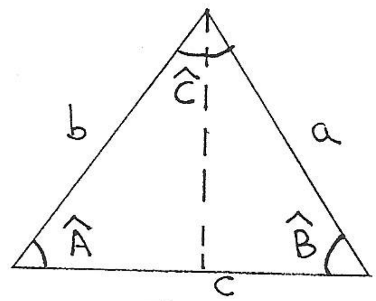


Figura 2

<u>TEOREMA DEL CATETO</u>: En un triángulo rectángulo, un cateto es <u>media proporcional</u> entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

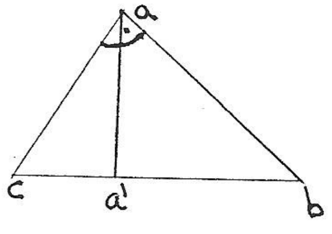


Figura 3

Fijándonos en la Figura 3, tenemos el cateto $\overline{c\ a}$; su proyección es $\overline{c\ a'}$ y la hipotenusa es $\overline{c\ b}$.

El teorema dice:

$$\boxed{\frac{\overline{cb}}{\overline{ca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{ca'}}}$$

TEOREMA DE LA ALTURA: En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa; es decir:

$$\frac{\overline{ba'}}{\overline{aa'}} = \frac{\overline{aa'}}{\overline{ca'}}$$

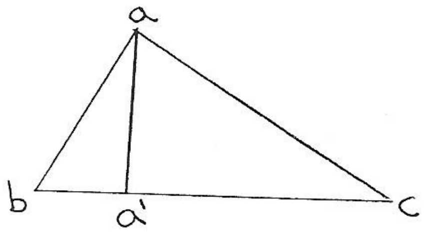


Figura 4