CAPÍTULO 1

MATRICES: ÁLGEBRA MATRICIAL

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer el concepto de matriz y sus tipos.
- Manejar fluidamente las operaciones con matrices.
- Conocer las distintas estructuras algebraicas de las que se pueden dotar a distintos conjuntos de matrices.
- Conocer las matrices traspuestas y sus propiedades.
- Calcular matrices inversas por transformaciones elementales.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [GUT/GAR-90], [LOP/VER-92], [PIT-91], [VILL-94]

E J E R C I C I O S

1.- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar A^2, A·B, A·C y -3A+8C, cuando el resultado pueda calcularse.

2.- Hallar las matrices A y B que verifiquen:

$$\begin{cases} 3A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ -6 & -8 & 7 \end{pmatrix} \\ \\ 5A + 7B = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 47 \\ 52 & 28 & 22 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones, cuando existan: A+B, A·B, A^2·B, B·A, 2A+3B.

4.- Hallar A^n siendo A la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Sea A una matriz de orden k nilpotente de índice n ($A^n = 0$). Probar que:
$I_k + A + A^2 + ... + A^{n-1}$ es la inversa de $I_k - A$.

6.- a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

b) Demostrar que I + A + A^2 es la inversa de I - A.

7.- Consideremos la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar A^n.
b) Expresar A^{-1} respecto de A e I.
c) Obtener las expresiones numéricas de A^{-1} y A^{-n}.

8.- a) Resolver la siguiente ecuación matricial, sabiendo que existe la inversa de la matriz (A-C): A·X + B·D = C·X + E·F
b) Hallar X en el caso de ser:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

9.- a) Resolver la siguiente ecuación matricial, sabiendo que A y C tienen inversa: A·X·C = B.
b) Como aplicación del anterior resultado, hallar la matriz X siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.- Resolver la ecuación matricial A·X·B = C siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11.- Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

12.- Obtener las matrices reales que conmutan con:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13.- Dada una matriz regular A, ¿es única la matriz inversa de A?

14.- Una matriz cuadrada es involutiva si coincide con su inversa. Demostrar que una matriz A es idempotente (A^2 = A) si y solo si la matriz B = 2A - **I** es involutiva.

15.- Hallar todas las matrices cuadradas reales de orden 2 que sean nilpotentes de índice 2 (es decir, es no nula y su cuadrado es la matriz nula).

16.- Una matriz cuadrada A se dice simétrica si coincide con su traspuesta. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas, dando en cada caso una demostración o un contraejemplo, según corresponda:

1. Si A y B son simétricas, entonces A·B es simétrica.
2. Si A es simétrica y P es una matriz cuadrada cualquiera, entonces $P\cdot A\cdot P^t$ es simétrica.
3. Si A es una matriz cualquiera, entonces $A\cdot A^t$ y $A^t\cdot A$ son simétricas.

17.- Una matriz A se dice antisimétrica si $A^t + A = 0$ (matriz nula). Demostrar:

1. Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.
2. Si A es antisimétrica y B es simétrica, entonces A·B es antisimétrica si y sólo si A·B = B·A.

18.- Dada una matriz cuadrada A = (a_{ij}) de orden n definimos su traza como la suma de los elementos de la diagonal de A, es decir, trA = $a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. Demostrar las siguientes propiedades:

1. tr(A+B) = trA + trB
2. trλA = λ·trA
3. tr(A·B) = tr(B·A)
4. En general tr(A·B) es distinto de trA·trB.
5. A·B - B·A es una matriz de traza nula.

19.- Probar que si el producto de dos matrices cuadradas es la matriz cero y una de ellas es regular, entonces la otra matriz es cero.

20.- Mediante operaciones elementales por filas, transformar la matriz A en una matriz triangular, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

21.- Utilizando operaciones elementales por filas, transformar en matrices escalonadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

22.- Calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23.- Calcular la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24.- Obtener la inversa de:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25.- Sea A una matriz cuadrada que cumple la condición $A^2 = A$. Calcular $(2A-I)^2$.

26.- Sea A una matriz cuadrada de orden n. Supongamos que A es una matriz inversible:

1. Demostrar que si B es tal que A.B = **I** entonces $B = A^{-1}$.
2. Demostrar que si C es tal que C.A = **I** entonces $C = A^{-1}$.

27.- Calcular, si ello es posible, las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

28.- Probar que si A es idempotente y A no es **I**, entonces A no es inversible.