MATRICES: ALGEBRA MATRICIAL

RESUMEN TEÓRICO

1.- Definiciones.

MATRIZ: Def 1: Sea un cuerpo K y sean I = { 1, 2, ..., m} y J = { 1,2,..., n } dos conjuntos finitos, se llama **MATRIZ** de tamaño o tipo mxn (m por n) sobre un cuerpo K a una aplicación de IxJ en K, es decir:

$$\begin{aligned} A: I\times J &\longrightarrow K \\ (i,j) &\longrightarrow a_{ij} \end{aligned}$$

$A \in M_{mxn}(K)$ (Conjunto de las matrices de tamaño mxn con coeficientes sobre el cuerpo K.)

Def. 2: Se llama **MATRIZ** a un conjunto de elementos ordenados en filas y columnas.

DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ: Se dirá que una matriz es de **DIMENSIÓN** mxn cuando tiene m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRIZ FILA: Se llama **MATRIZ FILA** a aquella matriz que consta únicamente de una fila. Son todas del tipo 1xn.

<u>MATRIZ COLUMNA</u>: Recibe el nombre de **MATRIZ COLUMNA** aquella que consta de una única columna. Son todas del tipo mx1.

<u>IGUALDAD ENTRE MATRICES</u>: Dos matrices A y B se dicen **IGUALES** cuando tienen los mismos elementos e igualmente dispuestos, es decir, **A = B** quiere decir que ambas son de igual dimensión, siendo además $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los pares de valores ij.

<u>MATRIZ TRASPUESTA</u>: Se llama **MATRIZ TRASPUESTA** de una dada A, de dimensión (m,n), a la matriz que representaremos por A', de dimensión (n,m), que tiene por filas las columnas de A y por columnas las filas de A, es decir:

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

Es evidente que $(A')' = A$.

<u>MATRIZ CUADRADA</u>: Se llama **MATRIZ CUADRADA** a la matriz en la que el número de filas y columnas coinciden.

Entonces el número de filas o columnas se llama **ORDEN DE LA MATRIZ.**

<u>DIAGONAL PRINCIPAL</u>: Se llama **DIAGONAL PRINCIPAL** de una matriz cuadrada a la sucesión formada por los elementos que tienen iguales sus dos subíndices.

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots$$

<u>MATRIZ SIMÉTRICA</u>: Una matriz cuadrada A se dice que es **SIMÉTRICA** si $A' = A$.

<u>MATRIZ ANTISIMÉTRICA (o HEMISIMÉTRICA)</u>: Una matriz cuadrada A se dice que es **ANTISIMÉTRICA o HEMISIMÉTRICA**, si se verifica que $A' = -A$. Es decir que $a_{ij} = -\,a_{ji}\ \forall i,j$. En las matrices antisimétricas todo elemento es el opuesto de su simétrico respecto de la diagonal principal. Por tanto, la diagonal estará constituida únicamente por ceros.

<u>MATRIZ DIAGONAL</u>: Una matriz cuadrada es **DIAGONAL** si son nulos todos los elementos que están fuera de la diagonal principal.

<u>MATRIZ ESCALAR</u>: Una matriz diagonal se dice que es **ESCALAR** si todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

<u>MATRIZ TRIANGULAR</u>: Una matriz cuadrada A, se llama **TRIANGULAR** cuando todos sus elementos situados a uno u otro lado de la diagonal principal son todos nulos y entre los del otro lado existe al menos uno distinto de cero.

<u>MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR)</u>: Si los elementos que están por debajo (encima) de la diagonal principal de una matriz triangular son nulos se llama **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR)**. Si también son nulos los elementos de la diagonal principal se llama **TRIANGULAR EN SENTIDO ESTRICTO**.

MATRIZ NULA o CERO: Se llama **MATRIZ NULA o CERO** a la matriz en la que todos sus elementos son cero.

MATRIZ OPUESTA: Se llama **MATRIZ OPUESTA** de la matriz A, a la matriz -A, en la que cada elemento es de la forma:

$$\text{Si } A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$$

MATRIZ HORIZONTAL: Se llama **MATRIZ HORIZONTAL** a aquella que tiene más columnas que filas.

MATRIZ VERTICAL: Se llama **MATRIZ VERTICAL** a aquella que tiene más filas que columnas.

MATRIZ IDENTIDAD: Se llama **MATRIZ IDENTIDAD** a la matriz diagonal escalar en la que los elementos de la diagonal principal son 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

MATRIZ CONJUGADA: Se llama **MATRIZ CONJUGADA** de una dada a la que sus elementos son los conjugados de los de la matriz dada y están dispuestos en las mismas posiciones. Se suele utilizar, sobre todo, cuando trabajamos en el cuerpo de los números complejos.

MATRIZ HERMÍTICA: Una matriz cuadrada se dice que es **HERMÍTICA** si su traspuesta coincide con su conjugada.

MATRIZ ANTIHERMÍTICA: Una matriz cuadrada se dice que es **ANTIHERMÍTICA** si es opuesta de la matriz traspuesta conjugada.

MATRIZ ASOCIADA: Se llama **MATRIZ ASOCIADA** de una dada a la matriz traspuesta de su conjugada.

MATRIZ NORMAL: Una matriz es **NORMAL** si es permutable con su asociada.

MATRIZ INVERSA: Se llama **MATRIZ INVERSA** de una matriz cuadrada A, y la representamos por A^{-1}, a la matriz que verifica: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ siendo I_n la matriz identidad de orden n (igual al de A).

MATRIZ UNITARIA: Una matriz es **UNITARIA** si su inversa coincide con su asociada.

MATRIZ REGULAR: Una matriz cuadrada es **REGULAR** si tiene elemento inverso para la operación producto de matrices.

MATRIZ SINGULAR: Una matriz es **SINGULAR** si no es regular.

MATRIZ ORTOGONAL: Una matriz es **ORTOGONAL** si su traspuesta coincide con su inversa. Es decir, $A' = A^{-1}$.

MATRIZ PERIÓDICA: Una matriz se dice **PERIÓDICA** si existe un $p \in N$ tal que $A^{p+1} = A$. Si p es el menor número que verifica la igualdad, p es el período.

MATRIZ NILPOTENTE: Una matriz es **NILPOTENTE** si existe un $n \in N$ tal que $A^n = 0$. (Nilpotente de índice n).

MATRIZ IDEMPOTENTE: Una matriz es **IDEMPOTENTE** si $A^2 = A$

MATRIZ INVOLUTIVA: Una matriz es **INVOLUTIVA** si $A^2 = I$. Es decir, $A = A^{-1}$.

SUBMATRICES: Dada una matriz A, se llaman **SUBMATRICES** de A a todas las matrices que se obtengan eliminando filas y columnas (o filas o columnas) de A.

TRAZA: Se llama **TRAZA** de una matriz cuadrada A a la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$Traza\ A = Tr(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$$

2.- Operaciones con matrices.

SUMA DE MATRICES: Dadas dos matrices de igual dimensión A y B, recibe el nombre de **SUMA DE A y B**, otra matriz C, de la misma dimensión, que se obtiene sumando los elementos que ocupan lugares homólogos en una y otra de las dadas, es decir:

$$\forall A,\ B,\ C \in M_{mxn}(K),\ A = (a_{ij})\ ;\ B = (b_{ij})\ ;\ C = (c_{ij})$$

$$A+B = C \rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

RESTA O DIFERENCIA DE MATRICES: Se llama **DIFERENCIA** entre dos matrices a la matriz que se obtiene al sumar a una matriz la opuesta de la otra:

$$\forall A,\ B \in M_{mxn}(K)\ ,\ A-B = A+(-B)$$
$$A = (a_{ij})\ ;\ B = (b_{ij})\ ;\ C = (c_{ij})$$
$$c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij}) = a_{ij} - b_{ij}$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR: Se llama **PRODUCTO DE UNA MATRIZ A POR UN ESCALAR h**, a la matriz **B** que se obtiene multiplicando por ese escalar todos los elementos de la matriz dada, es decir:

$$\forall A,\ B \in M_{mxn}\ ,\ h \in K,\ B = A.h = h.A$$
$$b_{ij} = h.a_{ij} = a_{ij}.h$$

PRODUCTO DE MATRICES: Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{nxs}$ se llama **PRODUCTO** de dichas matrices a una matriz $C = (c_{ij})_{mxs}$ tal que el elemento que ocupa el lugar (i,j) de la matriz producto se obtiene sumando todos los productos obtenidos al multiplicar los elementos de la fila i de la primera matriz por los correspondientes elementos de la columna j de la segunda matriz. Es decir:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

Podemos decir que el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con la suma y producto así definidas tiene estructura de anillo no conmutativo.

$$(M_{nxn}(K)\ ,+,\ .)\ \text{es ANILLO NO CONMUTATIVO}$$

3.- Propiedades de las matrices traspuestas.

1.- $(A')' = A,\ \forall A \in M_{mxn}(K)$

2.- $(A+B)' = A'+B',\ \forall A,\ B \in M_{mxn}(K)$

3.- $(\lambda A)' = \lambda A',\ \forall A \in M_{mxn}(K)\ ,\ \forall \lambda \in K$

4.- $(A_{mxn}.B_{nxp})' = B'_{pxn}.A'_{nxm}$

4.- Cálculo de la matriz inversa por transformaciones elementales.

Cuando a una matriz cuadrada A podemos aplicarle una serie de transformaciones elementales entre filas hasta llegar a la matriz identidad, podemos decir que esa matriz admite inversa y su inversa se obtiene al aplicar dichas transformaciones elementales entre filas a la matriz identidad.

Sea A una matriz cuadrada, supongamos que aplicándole transformaciones elementales podemos obtener la matriz identidad, es decir:

$$(F_r \circ F_{r-1} \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1)(A) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r \circ F_{r-1} \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1 \circ A = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = F_r \circ F_{r-1} \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1 = (F_r \circ F_{r-1} \circ \ldots \circ F_2 \circ F_1)(I)$$

Luego si hacemos coincidir las filas de la matriz A con las de la identidad tenemos:

$$(A \mid I) \xrightarrow{\quad F \quad} (I \mid A^{-1})$$

Las <u>transformaciones elementales entre filas</u> son de tres tipos:

a) $F_{i,j}$ cambia las filas i y j de cada matriz.
b) $F_{i(a)}$ con $a \neq 0$, $a \in K$, multiplica la fila i por a.
c) $F_{i,j(a)}$ suma la fila j multiplicada por "a" a la fila i.

Análogamente se definen las transformaciones elementales por columnas.

■

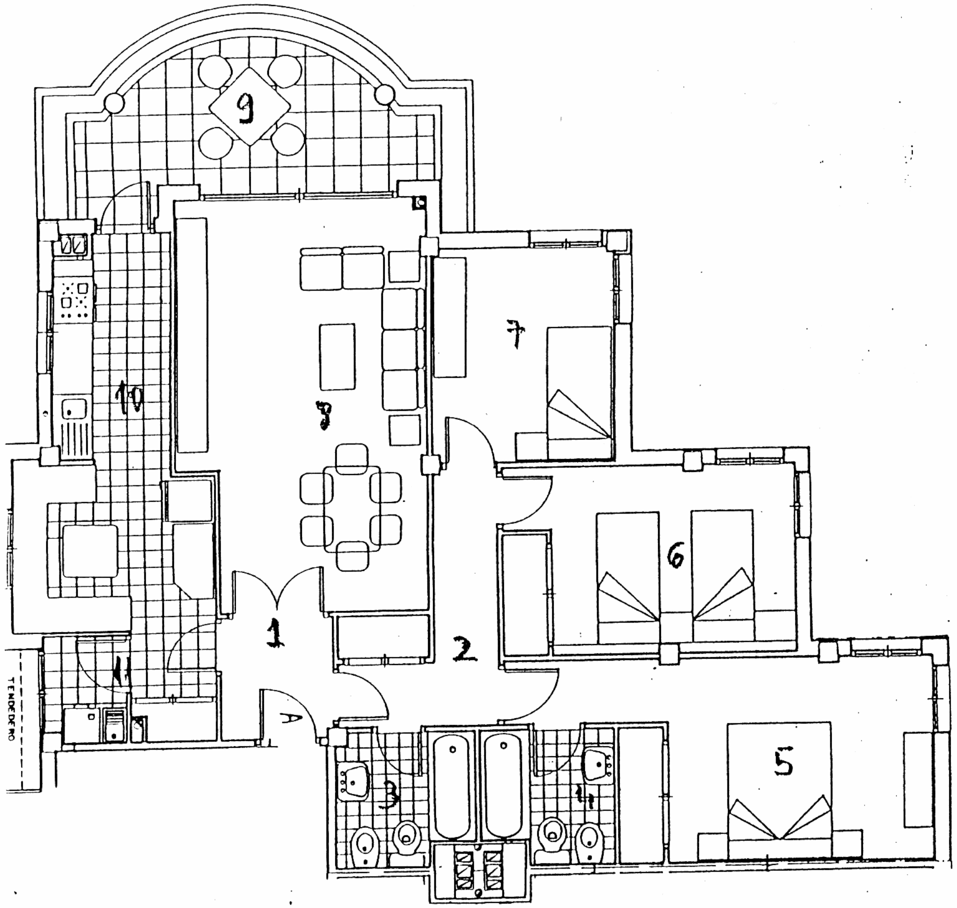
MATRICES DE CONEXIÓN

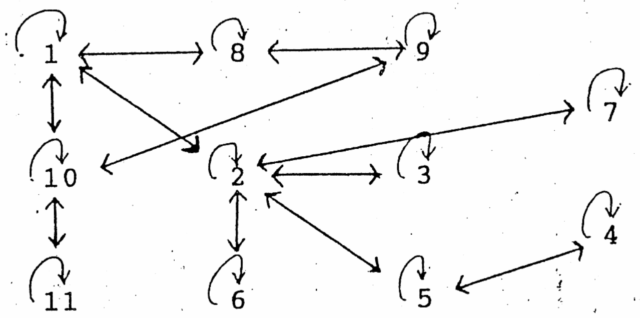
Relaccionado con la teoría de grafos, o el estudio de cualquier relación entre dos conjuntos, surgen unos tipos de matrices llamadas Boolianas o de conexión. Están formadas, sólamente por 1 y 0, y dan información sobre la configuración de un grafo (por ejemplo, qué lugares están mejor comunicados, cuál es el grado de comunicación de un punto, en general, del grafo). Veamos un poco acerca de estas sencillas e interesantes matrices.

Si tenemos los conjuntos X e Y y R ⊂ XxY establece una relación entre ellos, se puede escribir esta relación matricialmente. Para ello escribamos por columnas los elementos del primer conjunto y por filas los del segundo. Los elementos relacionados son los que determinan pares ordenados de R y los marcaremos con un 1 en el lugar de intersección correspondiente en la tabla antes descrita, y con 0 en caso contrario.

$$(a_{ij})/a = \begin{cases} 0 \text{ si } a_i \, \boldsymbol{R} \, b_j \\ 1 \text{ si } a_i \, R \, b_j \end{cases}$$

Apliquemos lo dicho a la planta de una vivienda familiar. Comenzamos numerando cada espacio y establezcamos la relación "estar conectados directamente" (sin ningún otro espacio intermedio). El grafo puede expresarse mediante la matriz de conexión obtenida siendo especialmente útil para establecer, no sólo las interrrelaciones entre los diferentes espacios habitables, sino también los posibles caminos entre dos cualesquiera de ellos. Si este tipo de matriz se elabora en la fase de diseño de un proyecto arquitectónico, puede mejorarse considerablemente la posterior circulación dentro de la vivienda al determinarse *a priori* los grados de accesibilidad de las distintas habitaciones y la correcta ubicación de los servicios.





Grafo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
2	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Matriz de Conexión

Si representamos el grado de conexión de un lugar como el cociente entre las conxiones existentes con él y las totales:

$$\text{grado de conexión } a_{ij} = \frac{\text{número de conexiones } a_{ij}}{\text{número conexiones totales}}$$

podemos calcular cuál es el punto mejor comunicado (por ejemplo, grado conexión cocina = 4/33 < grado conexión pasillo = 6/33).

MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

En los estudios de arquitectura suele haber una serie de herramientas para dibujar. Transladador, pantógrafo, inversores, reglas, compases, etc. son utilizados por los profesionales que allí trabajan y, sin embargo han aprendido su sencillo uso desconociendo, en general, sus posibilidades y fundamento.

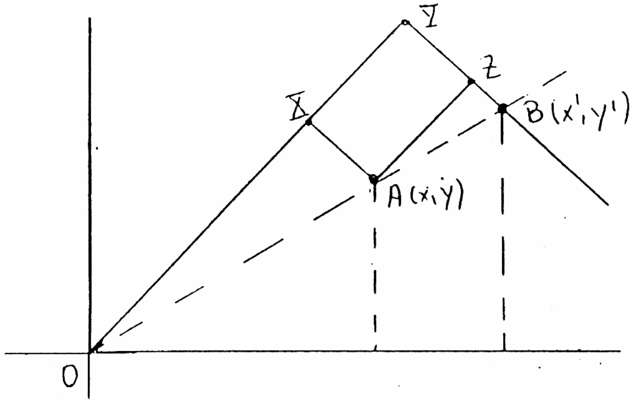
Este conjunto de herramientas constituye un grupo/tipo de recursos materiales para la clase de matemáticas. Es más, ni tan siquiera damos a la regla y el compás la atención que merecen a pesar de que Euclides las consagrara herramientas matemáticas en *Los Elementos*.

En los temas dedicados a transformaciones geométricas deberían tener respuesta, para distintas herramientas, preguntas como ¿en qué consiste?, ¿cómo funciona?, ¿qué transformación geométrica materializa?, ¿cómo queda determinada la imagen de un punto?

Por ejemplo, si se tratase de un pantógrafo:

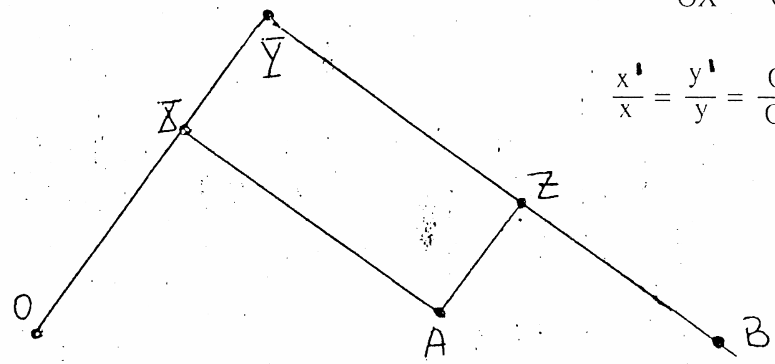
1. Consiste en 4 barras/tiras de madera o metal conectadas como se indica en la figura

XY = AZ
AX = YZ



2. El punto O se fija a la mesa de dibujo, A es un punzón que se moverá recorriendo las líneas del original que debe duplicarse, según la escala elegida, mediante la acción del lápiz existente en B.
3. La transformación que se materializa es una homotecia de centro O y razón (escala elegida) OY/OX.
4. Si se elige O como origen de una referencia métrica

$$\frac{OY}{OX} = \frac{OB}{OA} = k$$



$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{OB}{OA} = k$$

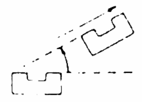
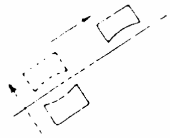
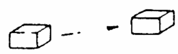
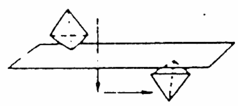
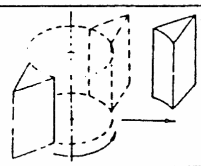
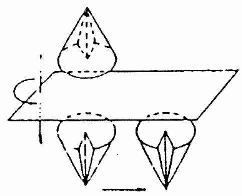
$x' = ky$

$y' = ky$ que, matricialmente, podemos escribir

$$(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

En general, independientemente de la referencia vectorial escogida, la homotecia de centro O queda determinada por una matriz diagonal del tipo de la anterior.

En caso de que se tratase de una transformación rígida en $\Re^2$ ó $\Re^3$ sabemos [A-T] que la matriz será:

ISOMETRIAS ——— ...				
	TRASLACION	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	+ 1	
R^2	TRASLACION Y GIRO	$\left(\begin{array}{cc\|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & a \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	+ 1	
	TRASLACION Y SIMETRIA AXIAL	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ \hline 0 & & 1 \end{array}\right)$	− 1	
	TRASLACION	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	+ 1	
	TRASLACION Y SIMETRIA ESPECULAR	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	− 1	
R^3	TRASLACION Y ROTACION AXIAL	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & b \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	+ 1	
	TRASLACION Y SIMETRIA ROTACIONAL	$\left(\begin{array}{ccc\|c} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & b \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	− 1	

Hacemos hincapié en el estudio matricial de las transformaciones porque, si bien en los estudios previos a la Universidad interesa la construcción geométrica de los puntos transformados, con vista al ejercicio profesional futuro de estos universitarios serán los plotters las herramientas que al englobar a todas las mencionadas anteriormente, realmente utilizarán junto con algún paquete de CAD. Hacemos la unión de matrices-plotters porque estas máquinas materializan en precisos dibujos unas instrucciones que contienen como datos las coordenadas de un determinado diseño que son transformadas haciendo uso de una matriz definida previamente en la de los puntos definitivos del dibujo.

EJEMPLO 3 Una viga elástica horizontal tiene soportes en cada extremo y está sometida a fuerzas en los puntos 1, 2, 3, como en la figura 1. Sea $\mathbf{f}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que enumere las fuerzas en estos puntos y sea $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que enumere las magnitudes de la flexión (esto es, movimiento) de la viga en los tres puntos. Usando la ley de Hooke de la física, se puede demostrar que

$$\mathbf{y} = D\mathbf{f}$$

donde D es una *matriz de flexibilidad*. Su inverso se llama *matriz de rigidez*. Describa el significado físico de las columnas de D y D^{-1}.

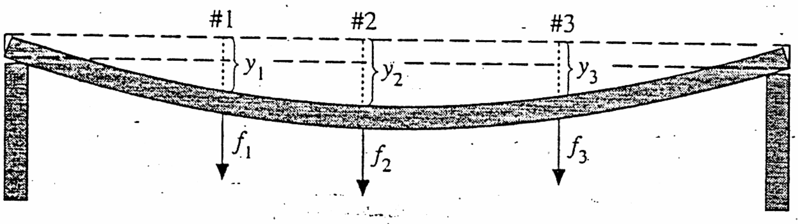


FIGURA 1 Flexión de una viga elástica.

Solución El vector $\mathbf{f} = (1, 0, 0)$ corresponde a una única fuerza de 1 unidad hacia abajo en el punto 1. El vector de flexión correspondiente es

$$\mathbf{y} = D\mathbf{f} = [\,\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\,]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot\mathbf{d}_1 + 0\cdot\mathbf{d}_2 + 0\cdot\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1$$

Así que la primera columna, $\mathbf{d}_1$, enumera las flexiones debidas a una fuerza de 1 unidad en el punto 1. Son válidas interpretaciones similares para $\mathbf{d}_2$ y $\mathbf{d}_3$.

Para estudiar la matriz de rigidez, escriba $D^{-1} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3]$ y considere el vector de flexión $\mathbf{y} = (1, 0, 0)$. Por el teorema 5, el vector de fuerza correspondiente es

$$\mathbf{f} = D^{-1}\mathbf{y} = [\,\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3\,]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot\mathbf{w}_1 + 0\cdot\mathbf{w}_2 + 0\cdot\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1$$

La primera columna de D^{-1} da las fuerzas que deben aplicarse en los tres puntos para producir una flexión de 1 unidad en el punto 1 y cero flexión en los otros puntos. Así mismo, $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$ enumeran las fuerzas requeridas para producir flexiones de 1 unidad en los puntos 2 y 3, respectivamente. En cada caso una o dos de las fuerzas deben ser negativas (apuntar hacia arriba) para producir una flexión de 1 unidad en el punto deseado y cero flexión en los otros dos puntos. Si la flexibilidad se mide, por ejemplo, en pulgadas de flexión por libra de carga, entonces las entradas de la matriz de rigidez están en libras de carga por pulgada de flexión.