

CAPÍTULO 2

MATRICES Y DETERMINANTES

- 2.1.- Inversiones en una permutación.
- 2.2.- Determinantes de distintos ordenes.
- 2.3.- Propiedades fundamentales de los determinantes.
- 2.4.- Determinante del producto de dos matrices.
- 2.5.- Menor complementario y adjunto de un elemento. Desarrollo por una línea.
- 2.6.- Determinantes especiales.
- 2.7.- Inversa de una matriz.
- 2.8.- Aplicación de los determinantes a la obtención del rango de una matriz.
- 2.9.- Cálculo del rango de una matriz mediante transformaciones elementales.

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer el concepto de inversión de una permutación.
- Conocer el concepto de determinante de una matriz cuadrada y sus propiedades.
- Calcular el determinante de una matriz cuadrada.
- Calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada por determinantes.
- Conocer el concepto de rango de una matriz.
- Calcular el rango de una matriz por menores y transformaciones elementales.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [GRO-91], [GUT/GAR-90],
[LOP/VER-92], [PIT-91], [VILL-91]

EJERCICIOS

1.- Calcular los siguientes determinantes mediante la regla de Sarrus:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

2.- Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

3.- Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

5.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

6.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

7.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

8.- Demostrar, sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

9.- Desarrollar, por los elementos de la tercera fila, el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

10.- Sin desarrollar los determinantes demostrar que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

11.- Comprobar, sin desarrollar, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ e+f & f+g & g+e \\ i+j & j+k & k+i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

12.- Probar, sin hacer el desarrollo, que:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha & \alpha+\beta & 2\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)^3$$

13.- La matriz A verifica que $A^2 = A$. Hallar todos los posibles valores de $\det A$.

14.- La matriz A verifica que $AA' = I_n$. Hallar los posibles valores de $\det A$.

15.- Demostrar que el determinante de una matriz nilpotente es 0.

16.- Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

17.- Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$$

18.- Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

19.- Sean los determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 2i & 4+i \\ -1 & 3-i \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ x & y & 0 & 1 \\ x^2 & y & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar los menores complementarios de los elementos a_{11} , a_{23} y a_{12} , cuando existan.
- 2.- Hallar los adjuntos de los elementos a_{11} , a_{23} y a_{12} , cuando existan.

20.- Calcular el determinante de orden cuatro:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

- a) Desarrollando por los elementos de la primera fila.
- b) Por operaciones sobre las filas y columnas.

21.- Determinar cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y cuando la respuesta sea afirmativa se calculará dicha inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

22.- Hallar la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

23.- Hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

24.- Utilizando la matriz adjunta, calcular las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

25.- Utilizando la matriz de adjuntos, obtener A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26.- Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 9 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

27.- Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

28.- Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 8 & 3 & 11 \\ 2 & 10 & 8 & 16 & 6 & 22 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

29.- Calcular el rango o característica de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

30.- Calcular la característica de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -12 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

31.- Calcular la característica de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

32.- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 6 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

33.- Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & -8 & 0 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

34.- Encontrar el valor de a para que sea 2 el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 & 4 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

35.- Discutir según los diferentes valores de a y b, el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$$