MATRICES Y DETERMINANTES

RESUMEN TEÓRICO

1.- Inversiones en una permutación.

Se llaman **PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS** a todas las diferentes ordenaciones (o maneras de ordenar) que se pueden efectuar con dichos elementos.

También se puede considerar que las **PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS** son las variaciones de n elementos tomados de n en n. El número de permutaciones de n elementos es $n!$.

Entre todas las permutaciones de n elementos se llama **PERMUTACIÓN PRINCIPAL** a cualquiera de ellas, que presente los elementos en un orden natural.

Dada una permutación, diremos que dos elementos de la misma **ESTÁN EN INVERSIÓN** (o forman **INVERSIÓN**) cuando el orden con el que figuran dichos elementos es distinto del orden con el que figuran en la permutación principal. Es decir, los números i y j forman una **INVERSIÓN**, si $i>j$, pero en esta permutación, i está antes que j.

Ejemplo: Si consideramos todas las permutaciones con los cinco elementos 1, 2, 3, 4, 5, la principal es la 1 2 3 4 5 y otra permutación sería 3 4 2 1 5.

Entonces: 3 y 4 no están en inversión, puesto que 3 está delante de 4, lo mismo que ocurre en la principal. 3 y 1 si están en inversión, puesto que 3 está delante de 1, al contrario de lo que ocurre en la principal.

Una permutación se dice de **CLASE PAR (IMPAR)** cuando tiene un número par (impar) de inversiones.

Vamos a considerar, que la permutación principal tiene cero inversiones y es de clase par.

Podemos observar que si se cambian entre sí dos elementos de una permutación esta cambia de clase.

Llamamos **SIGNATURA DE UNA PERMUTACIÓN** P $=(P_1, P_2, \ldots P_n)$ y la representamos por $\sigma(p)$ al número **+1** ó **-1** según sea Par o Impar, por tanto:

$$\sigma(p) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}; \quad \sigma(p) = (-1)^{\alpha}, \textit{ siendo } \alpha = n^{\underline{o}} \textit{ inversiones en } P.$$

2.- Determinantes de distintos órdenes.

Vamos a dar algunas definiciones de determinante de una matriz cuadrada de entre varias conocidas :

DEF. 1: Llamamos **DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA A** al número que le vamos a asociar a dicha matriz.

DEF. 2: Sea la matriz A, llamamos **DETERMINANTE DE A** y lo representamos por $|A|$ a la aplicación del conjunto M_{nxn} de las matrices cuadradas de órden n, en el conjunto K (Conjunto al que pertenecen los elementos de M_{nxn}) tal que a A le asocia un elemento de K.

$$\begin{aligned} f: M_{nxn}(K) &\longrightarrow K \\ A = (a_{ij}) &\longrightarrow f(A) = |a_{ij}| = \text{elemento de } K. \end{aligned}$$

DEF. 3: El **DETERMINANTE** de una matriz cuadrada A de orden n (nxn) definida sobre un conjunto K, es el número $|A| \in K$ que se obtiene sumando todos los productos posibles de n factores a_{ij}, cada uno precedidos del signo + ó - según que la permutación correspondiente al orden de los factores sea par o impar, y de modo que en cada término figure un elemento y solo uno de cada fila y de cada columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\alpha} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = \sum \sigma(p)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

Determinantes de SEGUNDO y TERCER ORDEN:

Para calcular el desarrollo de determinantes de **SEGUNDO ORDEN**, cuyo número de términos es 2! = 2 basta aplicar la definición 3ª de determinante de una matriz y obtenemos:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Podemos observar que las únicas permutaciones que pueden formarse con los números 1 y 2 son: 1 2 y 2 1; que dan lugar a los dos términos $a_{11}a_{22}$ la primera y $a_{12}a_{21}$ la segunda; como la primera no presenta inversión y la segunda presenta una, al primer sumando le corresponde el signo (+) y al segundo el signo (-).

Para el desarrollo de determinantes de **TERCER ORDEN**, cuyo número de términos es 3! = 6, podemos aplicar la definición ó la regla de Sarrus:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

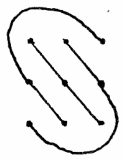
Las permutaciones de los segundos índices son:

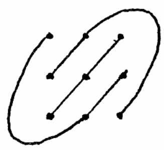
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1
(+)	(-)	(-)	(+)	(+)	(-)

de las cuales son pares la 1ª, 4ª y 5ª e impares las demás. Esto da lugar al desarrollo siguiente:

$$|D_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Por la regla de Sarrus:

(+)  *sumandos signo positivo*

(-)  *sumandos signo negativo*

3.- Propiedades fundamentales de los determinantes.

1.- Dada una matriz cuadrada A y su traspuesta A', se verifica que det(A) = det(A') ó también se puede escribir como |A| = |A'|.

2.- Si una matriz tiene una línea (fila o columna) constituida únicamente por ceros, el determinante de dicha matriz es igual a cero.

3.- Si se multiplican (o dividen) por un mismo número todos los elementos de una línea de una matriz, el correspondiente determinante queda multiplicado (o dividido) por ese número.

4.- Sea A una matriz cuadrada y sea A^* la matriz que se obtiene al cambiar entre sí dos líneas paralelas de A, entonces se verifica que:

$$\det(A) = -\det(A^*)$$

5.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es cero.

6.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

7.- Si cada uno de los elementos de una fila (o columna), de lugar i, de una matriz se sustituye por una suma de **h** sumandos, el determinante correspondiente es igual a la suma de los determinantes de las h matrices que tienen la fila (o columna) i, constituida por los primeros, segundos, ..., h-ésimos sumandos, respectivamente, y las restantes filas (o columnas) iguales a las de la primera matriz.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3+4 & 1+3 & 6+2 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

8.- Si en una matriz una de sus líneas es igual a una combinación lineal de sus paralelas, su determinante es nulo.

9.- Si a una línea de una matriz se le suma una combinación lineal de sus paralelas, el determinante de esta segunda matriz es igual al de la primera.

4.- Determinante del producto de dos matrices.

TEOREMA: El determinante correspondiente al producto de dos matrices cuadradas de órden n es el producto de los respectivos determinantes:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

COROLARIO: Si A es una matriz inversible nxn, entonces $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, puesto que:

$$Si\ 1 = |I| = |A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

5.- Determinantes especiales.

Determinante Triangular y Diagonal:

Se llama **DETERMINANTE TRIANGULAR** al determinante de una matriz triangular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

Se llama **DETERMINANTE DIAGONAL** al determinante de una matriz diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

Determinante de Vandermonde:

Dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ recibe el nombre de **DETERMINANTE DE VANDERMONDE,** de estos números, al determinante de la matriz cuadrada formada de la siguiente forma:

Se construye cada fila con los elementos dados elevados a (i-1), siendo i el subíndice que caracteriza a la fila correspondiente, así:

$$D_V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_2^0 & . & . & . & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & . & . & . & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & . & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & . & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

Cálculo de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{Adjunta\ de\ la\ traspuesta\ de\ A}{Determinante\ de\ A} = \frac{Adj(A')}{|A|},\ con\ |A| \neq 0.$$

8.- Aplicación de los determinantes a la obtención del rango de una matriz.

Dada una matriz A, de m filas y n columnas, consideremos todas las submatrices cuadradas de A, constituidas por los elementos comunes a h filas y h columnas, $h \leq m$; $h \leq n$; llamamos **MENORES DE ORDEN h DE A**, a los determinantes de las submatrices cuadradas de A, de orden h.

Se llama **RANGO DE UNA MATRIZ A**, al número que expresa el orden del mayor **MENOR** no nulo de dicha matriz, es decir, una matriz A tiene de rango el número natural h cuando existe al menos un menor de orden h distinto de cero, y todos los menores de órdenes superiores a h, si los hay, son nulos. Su expresión es r(A), rang(A) ó rango(A).

■

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS DETERMINANTES.

Todas las propiedades las enunciaremos suponiendo que las matrices que intervienen son **matrices cuadradas**.

1.- $|A| = |A'|$

2.- Si una matriz tiene una línea, fila o columna, constituida únicamente por ceros, el determinante de dicha matriz es igual a cero.

3.- Si se multiplican (ó dividen) por k todos los elementos de una línea de una matriz, el correspondiente determinante queda multiplicado (ó dividido) por k.

4.- Si A^* es la matriz que se obtiene al cambiar entre sí dos líneas (filas ó columnas) paralelas de A, se verifica que:

$$|A^*| = -|A|$$

5.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es cero.

6.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

7.- Si cada uno de los elementos de una fila (ó columna), de lugar i, de una matriz, se sustituyen por una suma de h sumandos, el determinante correspondiente es igual a la suma de los determinantes de las h matrices que tienen la fila (ó columna) i, constituida por el primero, segundo, ..., h-ésimo sumando, respectivamente, y las restantes filas (ó columnas) iguales a la de la primera matriz.

8.- Si en una matriz una de sus filas (o columnas) es igual a una combinación lineal de sus paralelas, su determinante es nulo.

9.- Si a una fila (ó columna) de una matriz se le suma una combinación lineal de sus paralelas, el determinante de esta segunda matriz es igual al de la primera.