

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- 3.1.- Introducción.
- 3.2.- Sistemas equivalentes.
- 3.3.- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales.
- 3.4.- Regla de Cramer.
- 3.5.- Método de Gauss.
- 3.6.- Método de Gauss-Jordan.
- 3.7.- Teorema de Rouché-Fröbenius.
- 3.8.- Sistemas de ecuaciones:
 - 3.8.a.- Sistemas de más incógnitas que ecuaciones.
 - 3.8.b.- Sistemas de más ecuaciones que incógnitas.
 - 3.8.c.- Sistemas homogéneos.

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer los sistemas de ecuaciones lineales y la equivalencia de sistemas.
- Discutir la existencia o no de soluciones en un sistema de ecuaciones lineales, particularmente, en función de varios parámetros.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales por diversos métodos y especialmente por eliminaciones sucesivas.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [GUT/GAR-90], [LOP/VER-92], [PIT-91], [VILL-94]

EJERCICIOS

1.- Resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{array} \right\}$$

2.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{array} \right\}$$

3.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y + z + t = 1 \end{array} \right\}$$

4.- Resolver, por la regla de Cramer, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \end{array} \right\}$$

5.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 15 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \end{array} \right\}$$

6.- Estudiar y resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} x + 3y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 15 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \end{array} \right\}$$

7.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y - 3z - 16t = 4 \\ y + 2z - 3t = 6 \\ -x - y + z + 9t = -2 \end{array} \right\}$$

8.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{array} \right\}$$

9.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} 5x - 11y + 9z = 4 \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

10.- Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss-Jordan:

$$\left. \begin{array}{r} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \end{array} \right\}$$

11.- Resolver el sistema siguiente aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 11y + 9z = 4 \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

12.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 2x - y - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{array} \right\}$$

13.- Discutir y resolver el sistema homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$$

14.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

15.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - z - t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

16.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - z = 0 \\ -x - 6y + z = 0 \end{array} \right\}$$

17.- Calcular el valor de **a** para el cual admite soluciones distintas de la trivial el

siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - y - 3z &= 0 \\ 3x + y + az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

18.- Hallar la relación entre **a** y **b** para que en el siguiente sistema existan soluciones distintas de la trivial:

$$\left. \begin{aligned} ax - y + z - t &= 0 \\ x - y - 3z + t &= 0 \\ 2x - by + z - 2t &= 0 \\ x + y - bz + t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

19.- Resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

20.- Discutir en función de **a** el siguiente sistema, resolviéndolo en los diferentes casos:

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z + t &= 0 \\ x + ay + z + t &= 0 \\ x + y + az + t &= 0 \\ x + y + z + at &= 0 \end{aligned} \right\}$$

21.- Idem:

$$\left. \begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ -x + ay - z &= 0 \\ ax - y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

22.- Idem:

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

23.- Discutir y resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

24.- Idem:

$$\left. \begin{aligned} x - y + 2z - t &= 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2t &= 0 \\ 3x + z - t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

25.- Discutir en función de **a** el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= a \\ x - ay + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

26.- Estudiar para los distintos valores de **a** el sistema:

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

27.- Estudiar para los distintos valores de **a** y **b** el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array} \right\}$$

28.- Discutir el siguiente sistema según los diferentes valores de **a** y resolverlo para los casos que sean compatibles:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \\ 4x + y = a \end{array} \right\}$$

29.- Encontrar los valores de **a** que hacen compatible el sistema resolviéndolo posteriormente:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 4 \\ ax - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = 5a \end{array} \right\}$$

30.- Discutir y resolver en su caso, según los valores de **a** el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + t = -1 \\ x + y + 3t = 4 \\ 5x - y + at = 10 \end{array} \right\}$$

31.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x - ay + z = 0 \end{array} \right\}$$

32.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} x + y + az = 1 \\ -x + ay - z = 2 \\ ax - y + z = 3 \end{array} \right\}$$

33.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} ax + y + z + t = a \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a \\ x + y + z + at = a \end{array} \right\}$$

34.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array} \right\}$$

35.- Resolver en \Re el sistema:

$$\left. \begin{array}{r} x + y + 2z + 3t = -1 \\ -x - 2y - 3z - 4t = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 7t = 1 \\ 3x + 4y + 7z + 10t = 2 \end{array} \right\}$$

36.- Resolver en \Re el sistema:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + z + 2t + 4u = 4 \\ -2x - 4y - z - 3t - 6u = -6 \\ 2x + 4y + 2t + 4u = 4 \\ 3x + 6y + z + 4t + 7u = 8 \end{array} \right\}$$

37.- Resolver, si es posible, de forma matricial los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 7 \\ a) \quad 4x + 2y = 8 \\ -3x - y + z = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ b) \quad 3x + 2y - z = 4 \\ -x - y + 5z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ c) \quad 2x + y - z = 2 \\ 4x - 3y + 6z = 7 \end{array} \right\}$$

38.- Estudiar y resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 5 \\ 4x + 3y - 3z = 3 \\ 6x + 2y - 2z = 8 \end{array} \right\}$$

39.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x = 5 \end{array} \right\}$$

40.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ 5x + 3y + 2z = 10 \end{array} \right\}$$

41.- Idem:

$$\left. \begin{array}{r} 2x + 3y - z + t + u = 5 \\ x - y + 2z + 3t - u = -2 \\ 5x - 2y - z - t + 5u = 4 \\ 8x \qquad \qquad \qquad + 3t + 5u = 7 \end{array} \right\}$$

42.- Discutir los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros:

$$a) \left. \begin{array}{l} (3-a)x - y + z = 0 \\ -x + (5-a)y - z = 0 \\ x - y + (3-a)z = 0 \end{array} \right\} \quad b) \left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = b^2 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x - ay + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ bx - 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

43.- Discutir y resolver el siguiente sistema, según los valores del parámetro a:

$$\left. \begin{array}{l} (1-a)x + (2a+1)y + (2a+2)z = a \\ ax + ay = 2a+2 \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z = a^2 - 2a + a \end{array} \right\}$$

44.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ -x + ay - z = 2 \\ ax - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

45.- ¿ Existe algún valor de **a** y **b** que hagan compatible indeterminado el siguiente sistema ?

$$\left. \begin{array}{l} 2x - ay + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ bx + 2y - 4z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{array} \right\}$$

46.- Discutir el sistema siguiente, resolviéndolo para algún valor de **a** que proceda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a^2 \end{array} \right\}$$

47.- ¿ Es compatible el siguiente sistema para algún valor de **k** ?

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y - 2z = 48 \\ 3x - 7y + 7z = 21 \\ 2x + y - kz = 3 \\ 2x + y - z = 4k \end{array} \right\}$$

48.- Discutir y resolver, en función de **a** y **b** el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{array} \right\}$$

49.- Idem:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z + t = a \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a \\ x + y + z + ay = a \end{array} \right\}$$