

**ANALISIS DE PANDEO POR  
FLEXION EN ELEMENTOS DE  
INERCIA VARIABLE CON  
DIVERSAS CONDICIONES DE  
SUSTENTACION**

Francisco Javier Enríquez Santos

FEBRERO 2006

# Introducción

El presente trabajo de investigación tiene por objeto realizar una aportación al estudio del pandeo por flexión de elementos estructurales de inercia variable con diferentes condiciones de sustentación.

La falta de información disponible sobre este tema, tanto en la normativa como en otras fuentes bibliográficas, supone que cuando surge el problema de dimensionar barras de inercia variable sujetas a compresión, no se realice un correcto dimensionamiento frente al pandeo en dichos elementos. La mayoría de las veces se aplican coeficientes de seguridad mayorados para el pandeo de este tipo de barras, postura conservadora, pero que va en contra del objetivo principal de los elementos de inercia variable, que es optimizar la estructura para disminuir las secciones de las barras y conseguir, en consecuencia, un ahorro de material.

Por ello, en este trabajo se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo del fenómeno de pandeo por flexión en este tipo de elementos constructivos, de tal manera que se pueda conocer con exactitud el comportamiento de la barra frente a dicha inestabilidad. Las conclusiones obtenidas se han plasmado en una metodología que permite calcular frente a pandeo, de manera práctica y sencilla, multitud de barras de inercia variable con diferentes condiciones de contorno, consiguiéndose así un dimensionamiento óptimo que vaya en consonancia con la filosofía de optimización de estos elementos estructurales.

Este trabajo ha sido estructurado en dos partes diferenciadas. La Parte I: “Revisión bibliográfica”, tiene por objeto la recopilación de la información básica sobre pandeo existente en la bibliografía. Y la Parte II: “Análisis de pandeo por flexión en barras de inercia variable con diversas condiciones de sustentación”, es el núcleo y parte innovadora de este trabajo, donde se analiza detalladamente el problema planteado.

La **Parte I** está dividida en tres capítulos:

- **Capítulo 1.** Aquí se introducen los conceptos básicos sobre equilibrio,

necesarios para comprender el fenómeno de pandeo por flexión. También se muestran las diferentes vías que históricamente se han seguido en el estudio del pandeo.

- **Capítulo 2.** Recopilación de la información general obtenida en la bibliografía sobre el pandeo de barras aisladas de inercia constante, que ha servido de guía para el posterior estudio de la barra de inercia variable, en la Parte II. Se analizan aquí las columnas y vigas-columnas, ideales y reales, con comportamiento elástico y plástico.
- **Capítulo 3.** Recopilación de la información existente sobre el pandeo de barras de inercia variable. Aquí se recogen las teorías y modelos de análisis que diferentes autores proponen para describir el pandeo en este tipo de elementos. Esta información ha sido de gran utilidad, ya que ha permitido contrastar la metodología propuesta en este trabajo, y ver que grado de dispersión tienen los resultados propuestos por unos y otros métodos.

La **Parte II** está formada por siete capítulos:

- **Capítulo 4.** Descripción detallada de los objetivos y justificación del trabajo de investigación realizado.
- **Capítulo 5.** Materiales y métodos empleados en la elaboración de este trabajo.
- **Capítulo 6.** Análisis teórico de pandeo en columnas de inercia variable con determinadas condiciones de sustentación en los extremos. Concretamente se reproducen los cinco casos de Euler para barras de inercia variable. Este capítulo es fundamental para la comprensión del fenómeno de pandeo en este tipo de barras, ya que se describen de manera detallada aspectos importantes tales como ecuaciones de la deformada de la barra, ley de momentos flectores, carga de pandeo, longitud de pandeo, modelización de la barra, etc.
- **Capítulo 7.** Análisis teórico-práctico de pandeo en columnas de inercia variable con condiciones genéricas de sustentación en sus extremos. En este capítulo se pretende modelizar el comportamiento frente a pandeo de barras que forman parte de sistemas estructurales más complejos, tales como pórticos, bloques de pisos, etc. Se comienza con un análisis puramente teórico, y se termina proponiendo las ecuaciones que gobiernan el comportamiento frente a pandeo de diferentes barras pertenecientes a diferentes tipos de estructuras que se pueden presentar en la práctica constructiva.

- **Capítulo 8.** Aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos 6 y 7, plasmada en una metodología práctica para el cálculo de pandeo en barras de inercia variable. Aquí se incluyen los pasos a seguir para el cálculo, y diversos problemas resueltos a modo de ejemplo, que además se han solucionado también por otros métodos propuestos por diferentes autores, lo que permite contrastar los resultados obtenidos.
- **Capítulo 9.** Comentarios sobre los resultados y conclusiones de este trabajo de investigación.

Finalmente, el trabajo incorpora el **Anejo A**, el cual contiene todas las fórmulas y tablas necesarias para aplicar la metodología práctica expuesta en el capítulo 8.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Revisión bibliográfica</b>	<b>8</b>
<b>1.</b>	<b>El pandeo por flexión</b>	<b>9</b>
1.1.	Concepto de equilibrio. Tipos de equilibrio . . . . .	9
1.2.	Inestabilidad estructural. El pandeo por flexión . . . . .	11
<b>2.</b>	<b>La barra aislada de inercia constante</b>	<b>13</b>
2.1.	Columnas esbeltas y pandeo en el campo elástico . . . . .	14
2.1.1.	La columna ideal . . . . .	14
2.1.1.1.	Definición de columna ideal . . . . .	14
2.1.1.2.	Teoría de la bifurcación del equilibrio . . . . .	14
2.1.1.3.	Métodos analíticos y numéricos en el estudio del pandeo . . . . .	15
2.1.1.4.	El método estático . . . . .	16
2.1.1.5.	El método energético . . . . .	24
2.1.1.6.	La viga-columna. Acoplamiento entre flexión y compresión . . . . .	29
2.1.1.7.	Columnas con restricciones elásticas en los extremos . . . . .	58
2.1.1.8.	Análisis general de columnas por el método matricial de rigidez. Matriz de rigidez geo- métrica . . . . .	73
2.1.2.	La columna real . . . . .	79
2.1.2.1.	Definición de columna real . . . . .	79
2.1.2.2.	Teoría de la divergencia del equilibrio . . . . .	80
2.1.2.3.	Evaluación de la excentricidad de la carga axial. Fórmula de la secante . . . . .	81
2.1.2.4.	Evaluación de la deformación inicial. Fórmula de Perry-Robertson . . . . .	87
2.1.2.5.	Método de Dutheil . . . . .	92
2.2.	Columnas cortas y pandeo en el campo plástico . . . . .	98
2.2.1.	Teoría del módulo tangente . . . . .	99

2.2.2. Teoría del módulo doble . . . . .	101
<b>3. La barra aislada de inercia variable</b>	<b>103</b>
3.1. Timoshenko . . . . .	103
3.2. Cudós y Quintero . . . . .	108
3.3. Ballio y Mazzolani . . . . .	109
3.4. Galambos . . . . .	110
3.5. Belluzi . . . . .	111
3.6. NBE, EA-95 . . . . .	111
<b>II Análisis de pandeo por flexión en barras de inercia variable con diversas condiciones de sustentación</b>	<b>113</b>
<b>4. Objetivos y justificación</b>	<b>114</b>
<b>5. Materiales y métodos empleados</b>	<b>117</b>
5.1. Material informático . . . . .	117
5.1.1. Equipo informático . . . . .	117
5.1.2. Programas informáticos . . . . .	117
5.2. Métodos referentes a la teoría de estructuras . . . . .	118
5.3. Métodos matemáticos . . . . .	118
<b>6. La columna ideal de inercia variable</b>	<b>119</b>
6.1. Columna de inercia variable biarticulada . . . . .	121
6.1.1. Análisis estático . . . . .	121
6.1.2. Columna equivalente . . . . .	129
6.2. Columna de inercia variable empotrada en un extremo y libre en el otro . . . . .	132
6.2.1. Caso A: Empotrada-libre . . . . .	132
6.2.1.1. Análisis estático . . . . .	132
6.2.1.2. Columna equivalente . . . . .	141
6.2.2. Caso B: Libre-empotrada . . . . .	143
6.2.2.1. Análisis estático . . . . .	143
6.2.2.2. Columna equivalente . . . . .	150
6.3. Columna de inercia variable biempotrada . . . . .	152
6.3.1. Análisis estático . . . . .	152
6.3.2. Columna equivalente . . . . .	163
6.4. Columna de inercia variable biempotrada con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus extremos . . . . .	165
6.4.1. Análisis estático . . . . .	165

6.4.2.	Columna equivalente . . . . .	175
6.5.	Columna de inercia variable empotrada en un extremo y articulada en el otro . . . . .	178
6.5.1.	Caso A: Empotrada-articulada . . . . .	178
6.5.1.1.	Análisis estático . . . . .	178
6.5.1.2.	Columna equivalente . . . . .	187
6.5.2.	Caso B: Articulada-empotrada . . . . .	190
6.5.2.1.	Análisis estático . . . . .	190
6.5.2.2.	Columna equivalente . . . . .	198
<b>7.</b>	<b>Columna con extremos elásticos</b>	<b>201</b>
7.1.	Columna de inercia variable con restricciones elásticas en los extremos . . . . .	201
7.1.1.	Caso A: Sin desplazamiento lateral relativo entre extremos (Intraslacional) . . . . .	202
7.1.1.1.	Ecuaciones pendiente-desplazamiento. Funciones de estabilidad . . . . .	204
7.1.2.	Caso B: Con desplazamiento lateral relativo entre extremos (Traslacional) . . . . .	208
7.1.2.1.	Ecuaciones pendiente-desplazamiento. Funciones de estabilidad . . . . .	211
7.2.	Caracterización de las restricciones elásticas en los extremos de una barra perteneciente a un sistema estructural . . . . .	211
7.2.1.	Barra de inercia variable rodeada de barras de inercia constante (Estructura Tipo I) . . . . .	212
7.2.1.1.	Estructura Tipo I-A (Intraslacional) . . . . .	212
7.2.1.2.	Estructura Tipo I-B (Traslacional) . . . . .	241
7.2.2.	Sistema formado por barras de inercia variable (Estructura Tipo II) . . . . .	271
7.2.2.1.	Estructura Tipo II-A (Intraslacional) . . . . .	271
7.2.2.2.	Estructura Tipo II-B (Traslacional) . . . . .	283
<b>8.</b>	<b>Metodología de aplicación práctica</b>	<b>297</b>
8.1.	Proceso de cálculo de pandeo en barras de inercia variable . . . . .	298
8.2.	Problemas resueltos . . . . .	302
<b>9.</b>	<b>Resultados y conclusiones</b>	<b>319</b>
9.1.	Resultados . . . . .	319
9.1.1.	Resultados referentes a los objetivos 1 y 3 (Capítulos 6 y 7) . . . . .	319
9.1.2.	Resultados referentes al objetivo 2 (Capítulo 8) . . . . .	323

*ÍNDICE GENERAL*

7

9.1.3. Resultados referentes al objetivo 4 (Capítulo 8) . . . . .	324
9.2. Conclusiones . . . . .	324

Parte I

Revisión bibliográfica

# Capítulo 1

## El pandeo por flexión

### 1.1. Concepto de equilibrio. Tipos de equilibrio

En construcción se pretende que una estructura resistente tenga un comportamiento estático, es decir, que la estructura sea estable, conservando sus características geométricas y resistentes originales a lo largo del tiempo. En términos generales:

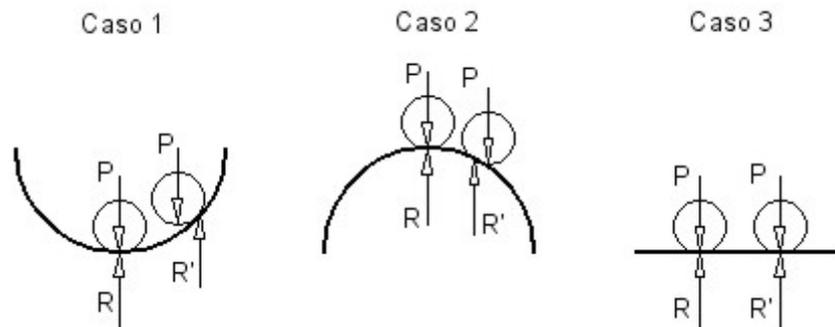
*“Estabilidad es una noción física y/o química asociada a la capacidad de un cuerpo de mantener su estado o su composición inalterados durante un tiempo relativamente prolongado.”*

Se considera que una estructura resistente está en equilibrio o es totalmente estable cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura, es decir, la resultante entre fuerzas externas y reacciones sobre la estructura debe ser nula, cumpliéndose las leyes de la estática:  $\sum F_{x,y,z} = 0$  y  $\sum M_{x,y,z} = 0$
2. El equilibrio de fuerzas antes mencionado debe ser estable.

Para definir el concepto de *equilibrio estable* se recurrirá a un ejemplo conocido. Supongamos una esfera sobre una superficie, de manera que podamos definir los tres casos representados en la Figura 1.1. Las fuerzas actuantes son el peso de la esfera,  $P$ , y la reacción en la superficie de apoyo,  $R$ .

**Caso 1** Si la esfera es sacada de su posición inicial mediante una perturbación y luego esta cesa, se ve claramente que el peso de la esfera y

Figura 1.1: *Diferentes tipos de equilibrio*

su reacción genera un momento que la obliga a retornar a su posición original. En este caso decimos que el equilibrio es *estable*.

**Caso 2** En este caso sucede al revés, se origina un momento que aleja a la esfera de su posición inicial, por lo que decimos que el equilibrio es *inestable*.

**Caso 3** Finalmente en este último caso, las fuerzas no generan momento alguno, por lo que el equilibrio es *indiferente* o *neutro* a la perturbación, y la esfera siempre estará en situación de equilibrio.

Si analizamos el ejemplo desde el punto de vista de la energía potencial, se puede hacer la siguiente interpretación:

**Caso 1** La esfera se encuentra inicialmente en un estado de mínima energía potencial, y cuando se produce una perturbación, esta tiende a volver a dicho estado inicial, luego el equilibrio es *estable*.

**Caso 2** La esfera parte de un punto de máxima energía potencial antes de la perturbación, por lo que cuando esta se produce, tiende a alejarse de la situación inicial buscando un punto de mínima energía, siendo el equilibrio *inestable*.

**Caso 3** No hay modificación de la energía potencial de la esfera, por lo que en cualquier posición existe el equilibrio de manera *indiferente* o *neutra*.

Por tanto podemos concluir que el equilibrio será estable siempre que conlleve un estado en el que la energía potencial del sistema sea mínima.

## 1.2. Inestabilidad estructural. El pandeo por flexión

Aplicando los conceptos de equilibrio comentados anteriormente a un sistema estructural, podemos realizar el siguiente análisis:

Una estructura o elemento estructural sobre el que inciden fuerzas externas, puede encontrarse en diferentes situaciones de equilibrio - estable, inestable o indiferente - dependiendo del tipo y del valor de la carga en cuestión. Según esto, para que la estructura permanezca funcional, debe encontrarse en equilibrio estable; de lo contrario la más mínima perturbación de la carga haría que el sistema se alejara de su configuración inicial, es decir, se produciría la ruina de la estructura.

Existen varios de tipos de inestabilidad en estructuras, pero en este trabajo nos centraremos en uno de los más importantes, *el pandeo por flexión*, el cual fue el primero en ser estudiado (Siglo XVIII). Este tipo de fenómeno inestable se produce al aplicar una carga axial de compresión, de cierto valor, a un elemento estructural lineal. Dicha carga axial puede combinarse también con otros tipos de cargas (momentos extremos, cargas laterales...). Este suele ser el principal problema de la mayoría de las columnas estructurales.

El caso es que al comprimir una columna, esta comenzará a deformarse según sus características elásticas y plásticas, comprimiéndose gradualmente. Pero si vamos aumentando la carga de manera progresiva, llegará un momento en el que la barra sufra una pequeña curvatura en su directriz. Se habrá alcanzado entonces la *carga de pandeo*, que marca la frontera entre el equilibrio estable y el inestable para la columna. Una vez se haya producido la curvatura inicial de la barra, se generarán internamente momentos flectores debido a la excentricidad de la carga axial respecto de su directriz, lo que provocará un incremento de la curvatura que conllevará un nuevo incremento de los flectores; así sucesivamente hasta que las tensiones soportadas por la barra sean excesivas y esta se rompa.

Un caso similar ocurre cuando tomamos un bastón de caminar y nos apoyamos sobre él dejando caer todo el peso del cuerpo, que si es considerable, hará que el bastón se curve produciéndose el pandeo.

En los siguientes capítulos correspondientes a esta primera parte del trabajo, se mostrará cómo históricamente, el problema del pandeo se ha descompuesto en diferentes grupos para un análisis eficiente del mismo. En la Figura 1.2 se observa un esquema general de las diferentes vertientes en el estudio del pandeo por flexión.

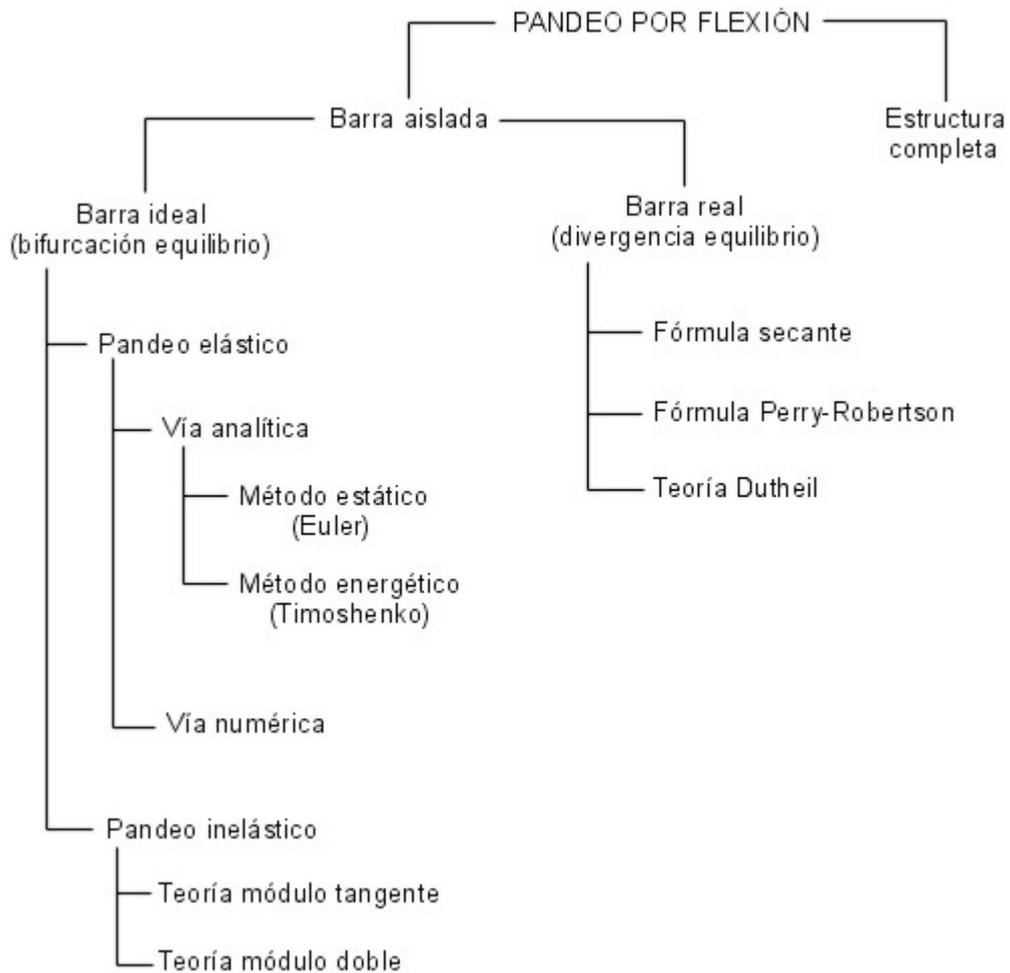


Figura 1.2: Esquema para el estudio del pandeo por flexión

En base a este esquema, y tras una revisión detallada de la bibliografía existente, se van a desarrollar a continuación los apartados referentes a la barra aislada, que constituirán los cimientos de este trabajo. En primer lugar trataremos la barra aislada de inercia constante y seguidamente la de inercia variable, la cual es el objeto de estudio del proyecto.

## Capítulo 2

# La barra aislada de inercia constante

En la bibliografía, tradicionalmente se ha estudiado el pandeo de *la barra aislada de sección e inercia constante*, ya que siempre ha sido el principal elemento estructural usado para trabajar a compresión. Para el estudio del comportamiento frente a pandeo de este elemento, se suponen diversas condiciones de carga y de sustentación en los extremos de la barra, de manera que se abarquen la mayor cantidad posible de situaciones que representen las condiciones reales de trabajo de la barra en el seno de la estructura.

Para realizar correctamente el estudio de inestabilidad en barras, es necesario separar el problema en dos vertientes, *pandeo en el campo elástico*, y *pandeo en el campo plástico*.

En el primer caso se admite que cuando en la barra llega a producirse el pandeo, el material está trabajando aún en la zona elástica, por lo que aunque el material podría aguantar mayor nivel de tensión hasta llegar al límite elástico, la tensión de pandeo será en este caso el factor limitante. Esto ocurre en las *columnas esbeltas*, cuya longitud es mucho mayor que el radio de giro de su sección.

En el segundo caso, antes de llegar a producirse el pandeo, el material de la barra ya ha pasado a trabajar en la zona inelástica o plástica, por lo que normalmente el factor limitante aquí es el límite elástico del material. Este es el caso característico de las *columnas cortas*, cuya relación entre longitud y radio de giro es bastante menor que en el caso de columnas esbeltas. Por tanto, estas columnas cortas no llegan a pandear, debido a que antes se ha producido la plastificación de las mismas. Sin embargo, actualmente muchas de los elementos resistentes se diseñan para trabajar en el campo plástico, por lo que es necesario tener en cuenta como se produce el pandeo bajo estas

condiciones.

## 2.1. Columnas esbeltas y pandeo en el campo elástico

El estudio de las columnas esbeltas siempre se ha subdividido en dos ramas básicas, *la columna ideal* y *la columna real*. A continuación se expone una detallada revisión bibliográfica de ambos casos de estudio.

### 2.1.1. La columna ideal

#### 2.1.1.1. Definición de columna ideal

Una *columna ideal* debe de cumplir las siguientes características:

- La carga axial a la que está sometida es centrada, es decir, no existe excentricidad de la carga respecto de la directriz de la barra.
- La barra es perfectamente recta, sin ninguna curvatura inicial por imperfecciones de fabricación.
- El material de la barra es isótropo y homogéneo.
- No existen tensiones residuales en la barra debidas a su fabricación.

Estos requisitos son imposibles de cumplir por cualquier columna real. No obstante, es conveniente tratar en primer lugar el pandeo en elementos ideales, para posteriormente, una vez conocidas las características básicas del fenómeno, se pueda dar un paso más y abordar el problema de la columna real.

También, a partir de ahora realizaremos la siguiente diferenciación. Cuando hablemos de columna ideal, hablaremos de *carga de pandeo* o *carga de Euler* (como veremos más adelante), y a la columna real le será asociado el término de *carga crítica*. De esta manera nos adaptamos al convenio usado por la mayoría de autores.

#### 2.1.1.2. Teoría de la bifurcación del equilibrio

La columna ideal es estudiada en base a la *teoría de la bifurcación del equilibrio*, la cual dice que cuando en una barra ideal sometida a una carga axial de compresión, dicha carga aumenta, en principio la barra sufre deformaciones por compresión en la dirección de la fuerza aplicada (deformaciones

lineales), encontrándose el sistema en equilibrio estable; pero cuando se llega a un cierto valor de la carga axial (*carga de pandeo*), la barra comienza a sufrir deformaciones en diferente dirección a la de la fuerza aplicada (deformaciones no lineales), entrando en una zona de equilibrio inestable. Estas deformaciones no lineales conllevan que la barra se vaya curvando, generándose momentos flectores que a su vez incrementarán la curvatura y viceversa, hasta producirse la rotura de la barra.

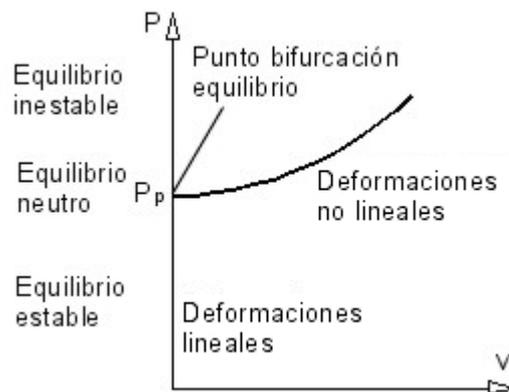


Figura 2.1: *Bifurcación del equilibrio*

El punto de transición entre el estado pre-pandeo (equilibrio estable) y post-pandeo (equilibrio inestable) recibe el nombre de *punto de bifurcación del equilibrio*, y en él, el sistema se encuentra momentáneamente en una situación de equilibrio indiferente o neutro. En la Figura 2.1 se muestra una gráfica carga-desplazamiento en la que se observa la evolución del sistema.

### 2.1.1.3. Métodos analíticos y numéricos en el estudio del pandeo

El pandeo es un fenómeno físico, y como tal, suele ser estudiado usando como herramienta un modelo matemático, cuya resolución puede abordarse por procedimientos analíticos o numéricos.

**Métodos analíticos** Se basan en la resolución analítica de las ecuaciones de equilibrio de la barra. Tienen el inconveniente de la complejidad matemática que supone resolver dichas ecuaciones bajo ciertas ligaduras o condiciones de contorno. Esta dificultad deriva de que al estudiar las barras en configuración deformada (análisis de segundo orden), las condiciones de equilibrio son ecuaciones diferenciales, de resolución más compleja que las simples ecuaciones algebraicas que surgen del análisis de primer orden. No obstante, existen

dos grandes ventajas al usar la vía analítica de estudio. La primera es que representa el único camino para obtener soluciones cualitativas y generales en función de los parámetros que intervienen, y el segundo es que al considerarse la barra como un elemento único y continuo, los resultados obtenidos permiten tener una visión global del fenómeno de pandeo, la cual bien interpretada hace que podamos entender la esencia del comportamiento inestable de un elemento estructural. Esto permite comparar y predecir cómo se comportarán frente a pandeo otros elementos con diferentes condiciones.

Los métodos analíticos básicos son el *método estático* y el *método energético*, el resto son derivados de ambos.

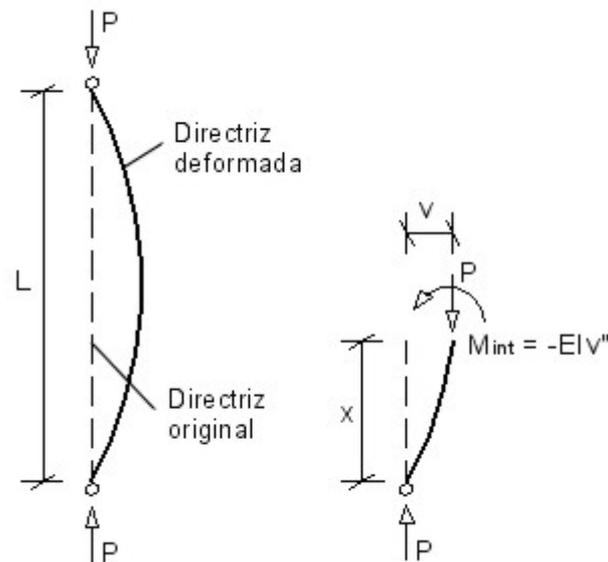
**Métodos numéricos** Consisten en la resolución numérica de las ecuaciones de equilibrio. Se basan en la discretización de la barra en nodos o rebanadas de manera que se puedan aplicar métodos de cálculo variacional como elementos finitos, diferencias finitas, Rayleigh-Ritz, Galerkin, Newmark... Estos métodos son hoy día los más usados por su potencia para resolver problemas de ingeniería complejos, pero tienen el inconveniente de que sólo proporcionan soluciones puntuales y cuantitativas.

En este trabajo se pretende entender y profundizar en las características y esencia del fenómeno de pandeo. Por tanto, el método elegido será exclusivamente el analítico, aprovechando las nuevas herramientas de cálculo simbólico computacional, que han servido de gran ayuda para conseguir nuestro objetivo.

Se analizarán a continuación los métodos estático y energético, ampliamente descritos en la bibliografía.

#### 2.1.1.4. El método estático

Este método fue empleado por primera vez en 1744 por el matemático suizo Leonhard Euler [14], quien estudió la carga de pandeo de una barra ideal aislada de inercia constante, sometida a carga axial y con diferentes condiciones de sustentación en sus extremos. Este método se basa en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio estático de fuerzas y momentos internos y externos a la barra, y en la resolución de las ecuaciones diferenciales resultantes, de las que finalmente se obtiene la carga de pandeo. El razonamiento empleado supone que en el momento de alcanzarse la carga de pandeo, aparecerá una pequeña curvatura en la directriz de la barra, produciéndose una *solicitación externa* (momento generado por la carga axial, debido a la excentricidad por la curvatura de la barra), que si supera a la


 Figura 2.2: *Barra biarticulada*

*reacción máxima interna* (momento interno máximo que puede soportar la barra en función de su geometría y características del material), la columna no podrá soportar la tensión y se producirá el pandeo. Por tanto la condición para obtener la carga de pandeo se obtiene de igualar la sollicitación externa a la reacción interna.

A continuación se aplicará el método de Euler para el cálculo de la carga de pandeo de una barra ideal aislada de longitud  $L$ , inercia constante  $I$ , y módulo de elasticidad  $E$ , sometida a una carga axial de compresión  $P$  en sus extremos. La barra se supondrá biarticulada en sus extremos (primer caso de Euler)<sup>1</sup> y no se considerará su peso propio. Se muestra el esquema del problema a estudiar en la Figura 2.2.

En primer lugar se establece la condición de equilibrio de fuerzas y momentos internos y externos a la barra:

$$\text{Momento externo: } M_{ext}(x) = P \cdot v(x)$$

$$\text{Momento interno: } M_{int}(x) = -EI \cdot \Phi(x)$$

<sup>1</sup>En la referencia [8] se muestra el desarrollo de los demás casos de Euler, en los que se obtiene la carga de pandeo para diferentes condiciones de sustentación en los extremos de la barra.

Donde  $v(x)$  es la flecha de la barra (desplazamiento de la directriz en cada punto respecto de la posición inicial), y  $\Phi(x)$  es la curvatura de la barra en cada punto, cuya expresión matemática es:

$$\Phi(x) = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \quad (2.1)$$

Igualando el momento externo y el interno llegamos a la siguiente ecuación de equilibrio<sup>2</sup>:

$$EI \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} + Pv(x) = 0 \quad (2.2)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) puede escribirse también:

$$\frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} + k^2 v(x) = 0 \quad (2.4)$$

Esta es una ecuación diferencial *no lineal*, de segundo orden, cuya resolución es bastante compleja.<sup>3</sup>

No obstante, es posible simplificar esta ecuación. Para ello supondremos que la curvatura, al ser pequeña en el momento en el que se inicia el pandeo, puede aproximarse de la siguiente forma:

$$\Phi(x) = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \approx v''(x) \quad (2.5)$$

Con esta nueva consideración, la ecuación 2.4 pasa a ser:

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0 \quad (2.6)$$

Y esta es una ecuación diferencial *lineal*, de segundo orden, cuya solución general es conocida:

---

<sup>2</sup>En la referencia [8] puede verse el análisis de este mismo problema pero considerando una ecuación de equilibrio para un elemento diferencial de columna, lo que lleva a una ecuación diferencial de cuarto orden, que presenta una serie de ventajas e inconvenientes los cuales se discuten en dicho texto.

<sup>3</sup>Esta ecuación requiere un tratamiento especial, y su resolución pasa por el cálculo de integrales elípticas. En las referencias [8] y [30] se analiza detalladamente este problema.

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.7)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx \quad (2.8)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx \quad (2.9)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$  se deben aplicar las condiciones de contorno de la barra, que en este caso son:

$$v(0) = 0 \quad (2.10)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.11)$$

$$v''(0) = 0 \quad (2.12)$$

$$v''(L) = 0 \quad (2.13)$$

De aplicar la primera condición tenemos que  $B = 0$ , y aplicando la segunda se llega a:

$$A \sin kL = 0 \quad (2.14)$$

Y teniendo en cuenta que  $A$  no puede ser nula para que exista  $v(x)$ , entonces:

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad (2.15)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto:

$$k = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow \frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (2.16)$$

Si despejamos  $P$ , obtenemos la expresión general para la carga de pandeo:

$$P_p = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.17)$$

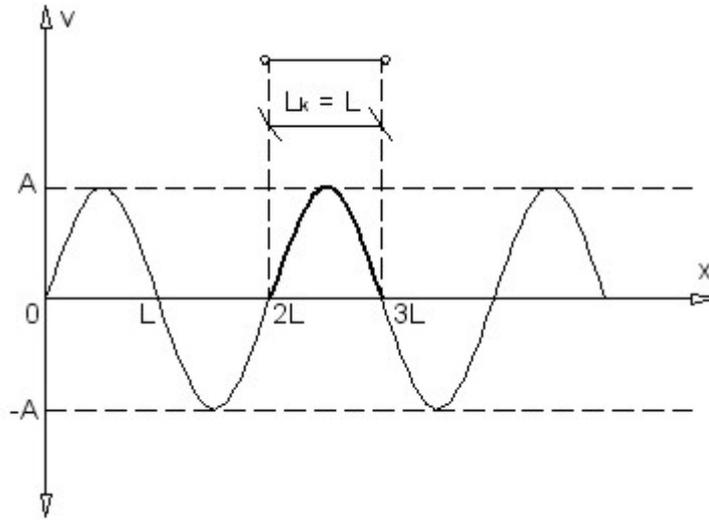


Figura 2.3: Deformada de la barra biarticulada

Para cada valor de  $n$  obtenemos la carga de pandeo teórica correspondiente a los diferentes *modos de pandeo*. No obstante, para  $n = 1$  ya se habrá producido el pandeo, por lo que nunca se darán los casos en los que  $n > 1$ . Según esto, la carga de pandeo, o también conocida como *carga de Euler* para la barra biarticulada, resulta ser:

$$P_p = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.18)$$

Por otra parte, la ecuación de la deformada de la barra es:

$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.19)$$

Deformada de tipo senoidal de la que se desconoce la amplitud  $A$  (Figura 2.3). La indeterminación de dicha amplitud es debida a que los cálculos realizados se han basado en la simplificación de la expresión de la curvatura (2.5). No obstante, conocer la expresión de la amplitud no es de suma importancia, ya que para valores de carga superiores a la de Euler, la barra aumenta progresivamente su amplitud hasta que esta se hace infinita y se produce la rotura. La flecha máxima se produce en  $x = L/2$ , siendo su valor  $v_{\text{máx}} = A$ , por lo que permanece indeterminada.

Las derivadas de la flecha son:

$$v'(x) = A \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (2.20)$$

$$v''(x) = -A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.21)$$

En cuanto al momento en la barra, este responde a la siguiente expresión:

$$M(x) = -EIv''(x) = EI \cdot A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.22)$$

El momento máximo se producirá también en  $x = L/2$ , y su valor será  $M_{\text{máx}} = EI \cdot v''(L/2) = EI \cdot A(\pi/L)^2$ , quedando también indeterminado por la constante  $A$ .

De la misma manera que se ha analizado la barra biarticulada, se pueden ver en la referencia [8] los distintos casos de Euler para diferentes condiciones de sustentación en los extremos. Después de analizar los resultados para la carga de pandeo en los demás casos de Euler, se puede concluir que la expresión general de dicha carga es:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{\beta^2 L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \quad (2.23)$$

Siendo  $L_k$  un parámetro denominado *longitud de pandeo* de la barra, que se define como el producto de la longitud real de la barra,  $L$ , por un factor llamado *coeficiente de esbeltez*,  $\beta$ , que depende de las condiciones de sustentación en sus extremos. Así pues,  $\beta = 1$  para el caso de la barra biarticulada, resultando que la longitud de pandeo,  $L_k$ , es igual a la propia longitud de la barra,  $L$ . En la Figura 2.4 se muestran los coeficientes de esbeltez para los cinco casos de Euler.

Según estas consideraciones, se puede concluir que la carga de pandeo de una barra de longitud  $L$  e inercia  $I$ , con un coeficiente de esbeltez  $\beta$ , es equivalente a la carga de pandeo de una barra biarticulada ( $\beta = 1$ ), con la misma inercia que la anterior y con una longitud  $L_k = \beta \cdot L$ .

Por otra parte, a partir de la representación gráfica de la deformada de la barra,  $v(x)$ , se deduce que la longitud de pandeo,  $L_k$ , puede definirse también como la *distancia entre dos puntos de inflexión consecutivos* de dicha curva.

Los puntos de inflexión de  $v(x)$  son aquellos en los que  $v''(x) = 0$ . Veamos por este procedimiento la longitud de pandeo para la barra biarticulada:

$$v''(x) = 0 \quad (2.24)$$

$$-A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} = 0 \quad (2.25)$$

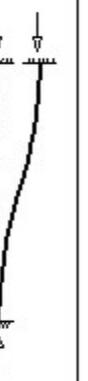
Tipo barra	1	2	3	4	5
ESQUEMA					
$\beta$	1	2	0.5	0.7	1

 Figura 2.4: Coeficientes  $\beta$  para los cinco casos de Euler

$$\sin \frac{\pi x}{L} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{L} = n\pi \quad (2.26)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

De donde se obtiene la abscisa general para un punto de inflexión:

$$x = nL \quad (2.27)$$

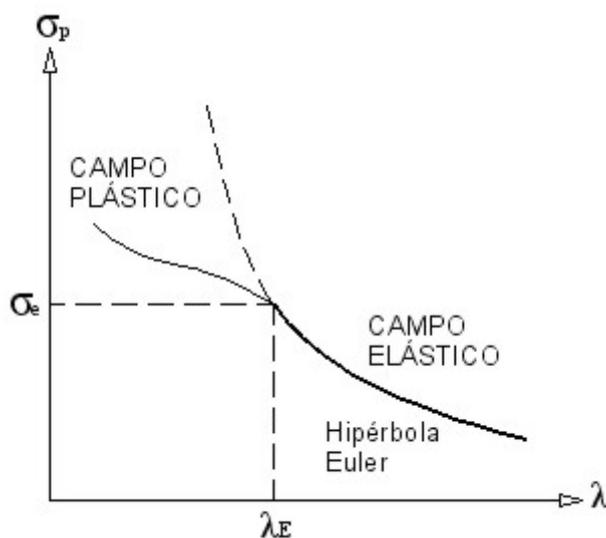
La distancia entre puntos de inflexión en este caso es constante y es justamente igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$ :

$$\Delta x = (n + 1)L - nL = L = L_k \quad (2.28)$$

Se observa de nuevo que la longitud de pandeo, expresada como distancia entre puntos de inflexión, coincide con la propia longitud de la barra.

Por otro lado, si trabajamos un poco con la fórmula de la carga de pandeo, podemos expresarla en términos de *tensión de pandeo* sin más que dividir por el área de la sección de la barra,  $A$ :

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \Rightarrow \sigma_p = \frac{P_p}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_k^2} \quad (2.29)$$


 Figura 2.5: *Hipérbola de Euler*

Teniendo en cuenta que el *radio de giro* de la sección de la barra se define como:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.30)$$

Operando en la ecuación 2.29, se llega a:

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 EI}{AL_k^2} = \frac{\pi^2 EAi^2}{AL_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L_k^2}{i^2}} = \frac{\pi^2 E}{(\beta L)^2} \quad (2.31)$$

Ahora introduciremos un nuevo parámetro llamado *esbeltez mecánica* de la columna, definida como:

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad (2.32)$$

Y escribiendo la tensión de pandeo en función de este nuevo término, se obtiene:

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.33)$$

Esta expresión es matemáticamente la ecuación de una hipérbola, y por ello se conoce a la función  $\sigma_p(\lambda)$  como *hipérbola de Euler* (Figura 2.5).

Se puede apreciar como cuanto mayor sea la esbeltez mecánica, menor será la carga de pandeo, es decir, el pandeo se producirá con mayor facilidad en columnas muy esbeltas.

Conviene también resaltar un punto significativo en dicha gráfica, cuyas coordenadas son  $(\sigma_p = \sigma_e, \lambda = \lambda_E)$ . En este punto, la esbeltez mecánica toma un valor tal que la tensión de pandeo,  $\sigma_p$ , alcanza justamente el valor del límite elástico del material,  $\sigma_e$ . Es por tanto el punto en el que el pandeo pasa de producirse en el dominio elástico, donde es válida la hipérbola de Euler, a tener lugar en el dominio inelástico o plástico, donde la fórmula de Euler deja de tener validez y el pandeo es estudiado mediante otras teorías que más adelante se verán<sup>4</sup>. La esbeltez mecánica en dicho punto es llamada esbeltez de Euler,  $\lambda_E$ , ya que es la mínima esbeltez que debe tener una columna para que su pandeo se produzca en el campo elástico y sea válida por tanto la teoría de Euler.

Como se esbozó anteriormente, las columnas cuya sección se plastifica antes de alcanzarse la tensión de pandeo ( $\lambda < \lambda_E$ ) son las llamadas *columnas cortas*, mientras que las columnas que pandean antes de la plastificación ( $\lambda > \lambda_E$ ) se denominan *columnas esbeltas*.

Concluye aquí esta breve exposición sobre el método estático de Euler.

### 2.1.1.5. El método energético

En 1961, el ingeniero ruso Stephen P. Timoshenko [30], propuso una nueva vía de estudio del pandeo de columnas ideales basado en el principio de conservación de la energía:

*“En un sistema conservativo en equilibrio, la energía de deformación almacenada en el sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas.”*

Según este principio, el problema se reduce al establecimiento de un balance energético en la columna. Para ello simplificaremos el problema considerando que la barra es inextensible o que cuando ocurre el pandeo ya se han producido los acortamientos por compresión, por lo que toda la energía de deformación a la que esta sometida la barra contribuirá al fenómeno de pandeo. El esquema del problema a estudiar se muestra en la Figura 2.6, donde se observa a modo de ejemplo la barra biarticulada de inercia constante estudiada por Euler.

---

<sup>4</sup>Ver sección 2.2., donde se muestran las teorías del módulo tangente y del módulo doble sobre el pandeo en el campo plástico.

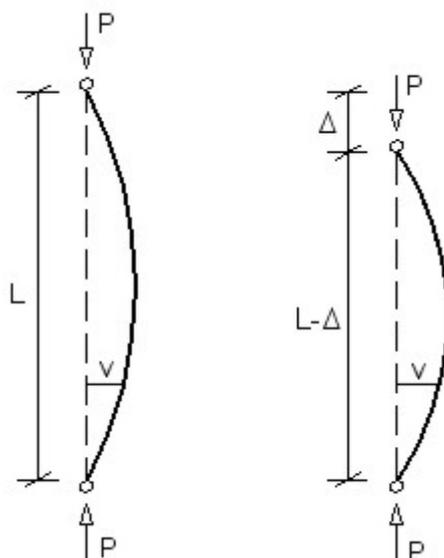


Figura 2.6: Barra biarticulada

Cuando la columna es sometida a una carga axial,  $P$ , en ambos extremos, si se supera el valor de la carga de pandeo, la barra se curva tomando una flecha,  $v(x)$ , y acercándose los extremos de la barra una distancia relativa  $\Delta$ , la cual se puede aproximar a la siguiente expresión:

$$\Delta \simeq \frac{1}{2} \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx \quad (2.34)$$

Para establecer el balance de energía es necesario conocer tanto el trabajo interno como el externo a la barra:

$$\text{Trabajo externo: } W_{ext} = P \cdot \Delta = \frac{P}{2} \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx$$

$$\text{Trabajo interno: } W_{int} = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} \cdot dx$$

El momento flector,  $M(x)$ , elegido para hallar el trabajo interno, puede ser el momento interno o el externo a la barra, ya que como se vió en el planteamiento de Euler, en el momento del pandeo ambos deben ser iguales. Para comprobar la veracidad de esta cuestión, se resolverá el problema usando ambos momentos y finalmente se compararán los resultados.

Conocidos los trabajos externo e interno, el balance de energía requiere que ambos sean iguales para que exista equilibrio:

$$\frac{P}{2} \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} \cdot dx \quad (2.35)$$

Utilizando el momento externo,  $M_{ext} = P \cdot v(x)$ , la ecuación anterior queda:

$$\frac{P}{2} \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx = \int_0^L \frac{(P \cdot v(x))^2}{2EI} \cdot dx \quad (2.36)$$

Despejando  $P$  obtenemos la carga de pandeo usando el momento externo:

$$P_p^{ext} = EI \cdot \frac{\int_0^L v'(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L v(x)^2 \cdot dx} \quad (2.37)$$

Si usamos el momento interno,  $M_{int} = -EI \cdot v''(x)$ , se obtiene:

$$\frac{P}{2} \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx = \int_0^L \frac{(-EIv''(x))^2}{2EI} \cdot dx \quad (2.38)$$

Por lo que la carga de pandeo usando el momento interno es:

$$P_p^{int} = EI \cdot \frac{\int_0^L v''(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L v'(x)^2 \cdot dx} \quad (2.39)$$

A la vista de los resultados se observa que es necesario conocer la ecuación de la deformada,  $v(x)$ , para obtener la carga de pandeo. Este es uno de los inconvenientes del método energético. No obstante, el problema se puede solucionar eligiendo una ecuación arbitraria para la flecha que cumpla las condiciones de contorno correspondientes, y aunque no permite obtener valores exactos de la carga de pandeo, sí que son bastante aproximados.

Como ejemplo se resolverá el primer caso de Euler (barra biarticulada), y se compararán los resultados obtenidos por Euler y Timoshenko (Figura 2.6). En primer lugar debemos elegir una ecuación de la deformada que cumpla las condiciones de contorno de la barra biarticulada:

$$v(0) = 0 \quad (2.40)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.41)$$

$$v''(0) = 0 \quad (2.42)$$

$$v''(L) = 0 \quad (2.43)$$

Lo más sencillo es usar una deformada polinómica que se ajuste al menos a las dos primeras condiciones, por ejemplo:

$$v(x) = x^2 - Lx \quad (2.44)$$

Cuyas derivadas primera y segunda son:

$$v'(x) = 2x - L \quad (2.45)$$

$$v''(x) = 2 \quad (2.46)$$

Se puede apreciar cómo la derivada primera cumple la condición de simetría con flecha máxima en  $L/2$ , pero la derivada segunda no cumple las condiciones de inflexión (momento nulo) en los extremos, propias de una articulación ((2.42) y (2.43)). No obstante, si  $v(x)$  cumple sus respectivas condiciones, la carga de pandeo obtenida es muy próxima a la exacta. Veamos que resultados obtenemos aplicando las fórmulas (2.37) y (2.39):

$$P_p^{ext} = EI \cdot \frac{\int_0^L v'(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L v(x)^2 \cdot dx} = EI \cdot \frac{\int_0^L (2x - L)^2 \cdot dx}{\int_0^L (x^2 - Lx)^2 \cdot dx} \quad (2.47)$$

Resolviendo las integrales:

$$P_p^{ext} = \frac{10EI}{L^2} \quad (2.48)$$

Por otra parte, aplicando la otra expresión:

$$P_p^{int} = EI \cdot \frac{\int_0^L v''(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L v'(x)^2 \cdot dx} = EI \cdot \frac{\int_0^L 2^2 \cdot dx}{\int_0^L (2x - L)^2 \cdot dx} \quad (2.49)$$

Resolviendo:

$$P_p^{int} = \frac{12EI}{L^2} \quad (2.50)$$

Vemos que aunque ambos resultados deberían ser iguales,  $P_p^{ext} = P_p^{int}$ , estos difieren en pequeña medida. Esto se debe a que la ecuación de la deformada,  $v(x)$ , que hemos elegido, no corresponde con la deformada exacta. Se puede comprobar como tomando la verdadera deformada obtenida por Euler,  $v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$ , obtenemos la carga de pandeo exacta o carga de Euler, coincidiendo las dos expresiones:

$$P_p^{int} = P_p^{ext} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.51)$$

Si comparamos los resultados obtenidos usando la deformada aproximada con la carga de Euler, podemos evaluar el error cometido:

$$P_p^{ext} = \frac{10EI}{L^2} \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{ext}(\%) = \frac{|\pi^2 - 10|}{\pi^2} \cdot 100 = 1,32\% \quad (2.53)$$

Y el error con la otra expresión es:

$$P_p^{int} = \frac{12EI}{L^2} \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_{int}(\%) = \frac{|\pi^2 - 12|}{\pi^2} \cdot 100 = 21,58\% \quad (2.55)$$

Se puede ver cómo el error cometido usando el momento externo es insignificante, mientras que si usamos el momento interno el error es superior al 20 %. Esto se debe a que en la expresión del momento interno, interviene la función  $v''(x)$ , cuya expresión se aleja bastante de la real por no cumplir las condiciones de contorno. Por tanto, siempre que se suponga una ecuación de la deformada,  $v(x)$ , diferente de la exacta, la carga de pandeo deberá calcularse usando el momento externo, ya que su expresión es más propicia para no cometer un error excesivo.

También cabe decir que el método energético, siempre que se use una  $v(x)$  aproximada, tiene la desventaja de predecir valores de la carga de pandeo superiores a la carga exacta de Euler. Por tanto, debemos tener en cuenta que nos quedamos del lado de la inseguridad. Sin embargo, por medio de iteraciones podemos llegar a conseguir una expresión de la deformada que haga que los momentos interno y externo sean casi iguales, por lo que tendremos una  $v(x)$  bastante precisa, que permitirá obtener una carga de pandeo casi exacta.

Un inconveniente más de este método, es que al no conocer la deformada exacta de la barra, se pierde la oportunidad de conocer la distancia entre puntos de inflexión y por tanto la longitud de pandeo,  $L_k$ , aunque en este caso también podemos obtenerla a partir de la expresión de la carga de pandeo.

Obviando estos inconvenientes, el método energético se presenta como una vía potente y más fácil en su resolución que el método estático, permitiendo calcular cargas de pandeo con muy variadas solicitaciones y condiciones de contorno, obteniéndose resultados bastante buenos, aunque siempre nos quede el desconocimiento de la forma exacta de la flecha.

### 2.1.1.6. La viga-columna. Acoplamiento entre flexión y compresión

Hasta ahora, únicamente hemos analizado el caso de una barra sometida a una carga axial de compresión. En este apartado estudiaremos el pandeo de una barra sobre la que, además de la carga axial, actúan otras cargas que generan momentos flectores, los cuales interactúan con dicha carga axial, variando el comportamiento frente a pandeo de la barra.

Podemos por tanto hacer ya una nueva diferenciación. Llamaremos *columna* a la barra sobre la que únicamente actúan cargas axiales de compresión, y llamaremos *viga-columna* a la barra sometida a cargas axiales y además a momentos flectores (flexión-compresión).

A continuación se analizan, aplicando el método estático, algunos casos de interés referentes a la barra biarticulada, aunque podríamos estudiar otros casos diferentes de sustentación de la barra aplicando la misma filosofía de análisis.

#### A) Viga-columna sometida a carga axial en ambos extremos y carga lateral uniformemente repartida

Comenzaremos estudiando una viga-columna de inercia constante,  $I$ , y longitud,  $L$ , biarticulada, sometida a una carga axial,  $P$ , y a una carga lateral,  $q$ , uniformemente repartida a lo largo de su directriz (Figura 2.7).

Los momentos interno y externo a la barra son:

$$\text{Momento externo: } M_{ext}(x) = P \cdot v(x) - q \cdot \frac{x^2}{2} + qL \cdot \frac{x}{2}$$

$$\text{Momento interno: } M_{int}(x) = -EI \cdot v''(x)$$

Igualando ambos momentos se llega a la siguiente condición de equilibrio:

$$EIv''(x) + Pv(x) - q\frac{x^2}{2} + qL\frac{x}{2} = 0 \quad (2.56)$$

Introduciendo el parámetro:

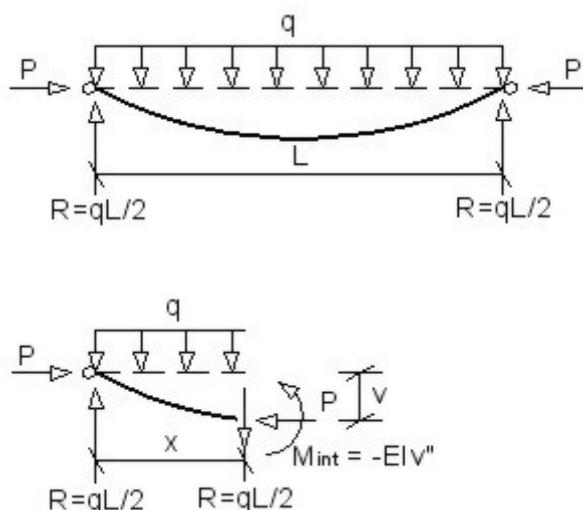


Figura 2.7: Viga-columna con carga lateral uniformemente repartida

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.57)$$

La ecuación (2.56) queda:

$$v''(x) + k^2v(x) - \frac{q}{2EI}x^2 + \frac{qL}{2EI}x = 0 \quad (2.58)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, no homogénea y de coeficientes constantes, cuya solución general es:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + \frac{q[k^2x(x-L) - 2]}{2EI k^4} \quad (2.59)$$

Sus respectivas derivadas son:

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx + \frac{q(2x-L)}{2EI k^2} \quad (2.60)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx + \frac{q}{EI k^2} \quad (2.61)$$

Para conocer los valores de las constantes \$A\$ y \$B\$, se deben aplicar las condiciones de contorno:

$$v(0) = 0 \quad (2.62)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.63)$$

$$v''(0) = 0 \quad (2.64)$$

$$v''(L) = 0 \quad (2.65)$$

En este caso las dos últimas condiciones son redundantes. De aplicar las dos primeras se obtiene que:

$$B = \frac{q}{EI k^4} \quad (2.66)$$

$$A = \frac{q}{EI k^4} \tan \frac{kL}{2} \quad (2.67)$$

Con lo que la ecuación de la deformada finalmente queda:

$$v(x) = \frac{q}{EI k^4} \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \frac{q}{EI k^4} \cos kx + \frac{q[k^2 x(x-L) - 2]}{2EI k^4} \quad (2.68)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{q}{EI k^3} \tan \frac{kL}{2} \cos kx - \frac{q}{EI k^3} \sin kx + \frac{q(2x-L)}{2EI k^2} \quad (2.69)$$

$$v''(x) = -\frac{q}{EI k^2} \tan \frac{kL}{2} \sin kx - \frac{q}{EI k^2} \cos kx + \frac{q}{EI k^2} \quad (2.70)$$

Para ver el efecto de la interacción entre  $P$  y  $q$ , debemos comparar la ecuación de la deformada cuando ambas están presentes (2.68), con la correspondiente a la deformada generada únicamente por la carga  $q$ .

Si sólo actúa la carga lateral,  $q$ , la ecuación de la flecha para la barra es la que se obtiene del análisis de primer orden, descrito en cualquier libro de resistencia de materiales:

$$y(x) = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (2.71)$$

Si dividimos ambas deformadas se obtiene la siguiente relación:

$$\Phi_f(x) = \frac{v(x)}{y(x)} = \frac{\frac{q}{EI k^4} \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \frac{q}{EI k^4} \cos kx + \frac{q[k^2 x(x-L) - 2]}{2EI k^4}}{\frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)} =$$

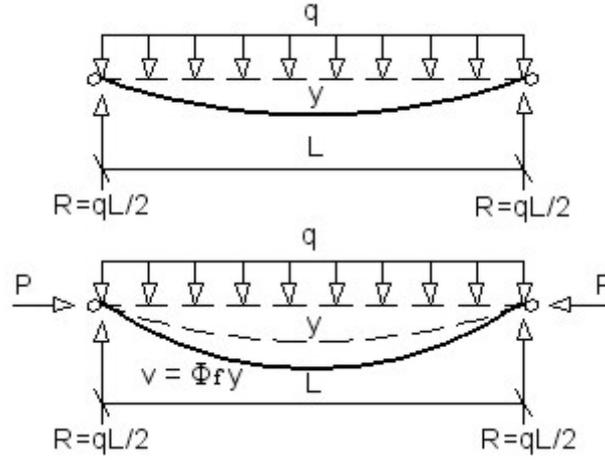


Figura 2.8: Amplificación de la flecha

$$= \frac{12(2 \tan \frac{kL}{2} \sin kx + 2 \cos kx + k^2 x(x-L) - 2)}{k^4 x(L^3 - 2Lx^2 + x^3)} \quad (2.72)$$

Según esto, se puede asumir que la flecha producida por  $P$  y  $q$ , es igual a la producida únicamente por  $q$ , multiplicada por el parámetro  $\Phi_f(x)$ , el cual es conocido como *coeficiente de amplificación de la flecha*:

$$v(x) = \Phi_f(x) \cdot y(x) \quad (2.73)$$

Por tanto, si tenemos inicialmente una barra sometida a una carga lateral,  $q$ , su deformada será justamente  $y(x)$ . Sin embargo, si a continuación añadimos una carga axial,  $P$ , la deformada inicial aumenta, transformándose en  $v(x)$  (Figura 2.8).

### Cálculo de la flecha máxima, $v_{\text{máx}}$

En los extremos de la barra no existe amplificación, siendo  $v(0) = y(0) = v(L) = y(L) = 0$ . La amplificación va aumentando conforme nos alejamos de los extremos y esta se hace máxima en  $x = L/2$ , llegándose a los siguientes valores:

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (2.74)$$

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \Phi_f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{48 \left(8 \sec \frac{kL}{2} - k^2 L^2 - 8\right)}{5k^4 L^4} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
 v_{\text{máx}} = v\left(\frac{L}{2}\right) &= \left[ \frac{48 \left(8 \sec \frac{kL}{2} - k^2 L^2 - 8\right)}{5k^4 L^4} \right] \cdot \frac{5qL^4}{384EI} = \\
 &= \frac{q \left(8 \sec \frac{kL}{2} - k^2 L^2 - 8\right)}{8EI k^4} \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

Podemos trabajar un poco con la expresión de  $\Phi_{f,\text{máx}}$  (2.75), para obtener una expresión más práctica y sencilla. Si desarrollamos la secante en serie de potencias:

$$\sec \frac{kL}{2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{kL}{2}\right)^2 + \frac{5}{24} \left(\frac{kL}{2}\right)^4 + \frac{61}{720} \left(\frac{kL}{2}\right)^6 + \dots \quad (2.77)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.75) y operando, se llega a:

$$\Phi_{f,\text{máx}} = 1 + 0,4067 \left(\frac{kL}{2}\right)^2 + 0,1649 \left(\frac{kL}{2}\right)^4 + \dots \quad (2.78)$$

También es conveniente poner el parámetro,  $k$ , en función de la carga de pandeo,  $P_p$ , para tener un punto de referencia respecto al cual aumenta o disminuye la carga axial,  $P$ . Según esto:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.79)$$

Si se alcanza el valor de la carga de pandeo, tenemos que:

$$k_p = \sqrt{\frac{P_p}{EI}} = \frac{\pi}{L} \quad (2.80)$$

Entonces podemos escribir:

$$k = \frac{\sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_p} \cdot k_p = \frac{\sqrt{\frac{P}{EI}}}{\sqrt{\frac{P_p}{EI}}} \cdot \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{P_p}} \quad (2.81)$$

Sustituyendo esta nueva expresión de  $k$  en la ecuación (2.76), se obtiene:

$$\Phi_{f,\text{máx}} = 1 + 1,003 \left(\frac{P}{P_p}\right) + 0,1004 \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 + \dots \quad (2.82)$$

Si despreciamos los decimales tenemos que:

$$\Phi_{f,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \simeq 1 + \left(\frac{P}{P_p}\right) + \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 + \dots \quad (2.83)$$

Y esta es una serie geométrica de razón  $r = P/P_p$ , la cual es convergente y se puede sumar siempre que  $r < 1$ , es decir que la carga  $P$  no supere a la carga de pandeo,  $P_p$ , o de lo contrario la serie diverge hacia infinito. Esto supone que la flecha se amplifica hasta el infinito, demostrándose que si  $P \geq P_p$ , ya tiene lugar el pandeo. Por tanto, sumando la serie, finalmente obtenemos una expresión fácil y sencilla para el *coeficiente de amplificación de la flecha máxima*:

$$\Phi_{f,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \simeq \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.84)$$

Y podemos escribir:

$$v_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \Phi_{f,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \cdot y_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \frac{5qL^4}{384EI} \quad (2.85)$$

Si analizamos el valor de la amplificación cuando la carga  $P$  varía, se puede observar como cuando  $P = 0$ , no existe amplificación de la flecha. A medida que  $P$  aumenta, se incrementa la amplificación hasta alcanzarse el valor de la carga de pandeo ( $P = P_p$ ), situación en la cual la flecha se hace infinita asintóticamente. En este caso, a diferencia del caso en el que no actúa

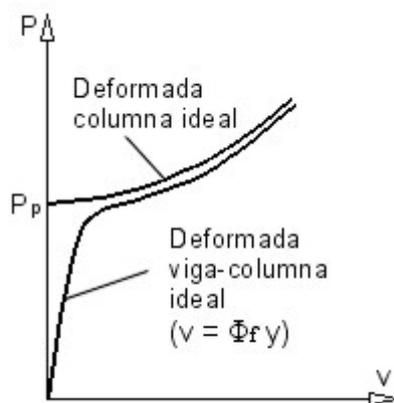


Figura 2.9: Deformación de la viga-columna ideal

carga lateral,  $q$ , la bifurcación del equilibrio no se produce de manera brusca

sino que desde  $P > 0$ , comienzan a producirse deformaciones adicionales que amplifican a las deformaciones producidas por  $q$  (Figura 2.9). Esto en principio no parece lógico, ya que como se vio anteriormente, la teoría de la bifurcación del equilibrio dice que una carga axial,  $P$ , actuando sobre una barra ideal, sólo comenzará a producir deformaciones cuando se alcance la carga de pandeo. Por tanto, cabría esperar que si  $P$  aún no ha llegado al valor de la carga de pandeo,  $P_p$ , no debería producirse amplificación de la flecha.

La respuesta a esta cuestión es que en este caso, al existir una flecha inicial,  $y(x)$ , cuando es aplicada la carga axial, la barra ya no cumple uno de los requisitos de *columna ideal*: directriz perfectamente recta, sin ninguna curvatura inicial. Es decir, aunque la columna es ideal originalmente, al ser sometida a la carga lateral,  $q$ , adquiere una flecha inicial que impide que en este caso la teoría de la bifurcación del equilibrio pueda ser utilizada.

Cuando estudiemos la *columna real*, veremos que cuando existe una curvatura inicial de la barra, esta se rige por la *teoría de la divergencia del equilibrio*<sup>5</sup>.

### Amplificación del momento y cálculo del momento máximo, $M_{\text{máx}}$

Al igual que es interesante conocer la flecha máxima y su amplificación correspondiente, es conveniente conocer el momento máximo que se produce en la viga-columna, el cual de se verá afectado también de su correspondiente amplificación.

La expresión general del momento en la barra es:

$$M(x) = -EIv''(x) \quad (2.86)$$

Y la derivada segunda de la flecha, como se vio anteriormente es:

$$v''(x) = -\frac{q}{EI k^2} \tan \frac{kL}{2} \sin kx - \frac{q}{EI k^2} \cos kx + \frac{q}{EI k^2} \quad (2.87)$$

Por lo que tenemos:

$$M(x) = \frac{q}{k^2} \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \frac{q}{k^2} \cos kx - \frac{q}{k^2} \quad (2.88)$$

Por otra parte, el momento generado únicamente por la carga lateral,  $q$ , es:

$$M_y(x) = -EIy''(x) \quad (2.89)$$

<sup>5</sup>Ver sección 2.1.2., en la que se trata la columna real y la divergencia del equilibrio.

Y como:

$$y''(x) = \frac{q}{2EI}x(x - L) \quad (2.90)$$

Se obtiene:

$$M_y(x) = \frac{q}{2}x(L - x) \quad (2.91)$$

Dividiendo el momento total entre el momento producido únicamente por  $q$ , obtenemos el *coeficiente de amplificación del momento*:

$$\begin{aligned} \Phi_m(x) &= \frac{M(x)}{M_y(x)} = \frac{\frac{q}{k^2} \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \frac{q}{k^2} \cos kx - \frac{q}{k^2}}{\frac{q}{2}x(L - x)} = \\ &= \frac{2 \left[ \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right]}{k^2x(L - x)} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Cumpléndose por tanto la relación:

$$M(x) = \Phi_m(x) \cdot M_y(x) \quad (2.93)$$

Por otra parte, el momento máximo, al igual que la flecha máxima, se produce en  $x = L/2$ , y por tanto:

$$M_{y,\text{máx}} = M_y \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{qL^2}{8} \quad (2.94)$$

$$\Phi_{m,\text{máx}} = \Phi_m \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{8(\sec \frac{kL}{2} - 1)}{k^2L^2} \quad (2.95)$$

$$M_{\text{máx}} = M \left( \frac{L}{2} \right) = \left[ \frac{8(\sec \frac{kL}{2} - 1)}{k^2L^2} \right] \cdot \frac{qL^2}{8} = \frac{q(\sec \frac{kL}{2} - 1)}{k^2} \quad (2.96)$$

De nuevo, mediante el desarrollo en serie de la secante, podemos simplificar el problema obteniendo una expresión más sencilla del *coeficiente de amplificación del momento máximo*, de tal manera que finalmente se obtiene:

$$M_{\text{máx}} = \Phi_{m,\text{máx}} \cdot M_{y,\text{máx}} = \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] \frac{qL^2}{8} \quad (2.97)$$

**B) Viga-columna sometida a carga axial en ambos extremos y carga lateral concentrada**

Este caso es muy similar al anterior, con la pequeña particularidad de que tenemos un punto de discontinuidad donde está concentrada la carga lateral,  $Q$ . Las características de la barra se considerarán semejantes a las del apartado A). El esquema del problema se muestra en la Figura 2.10.

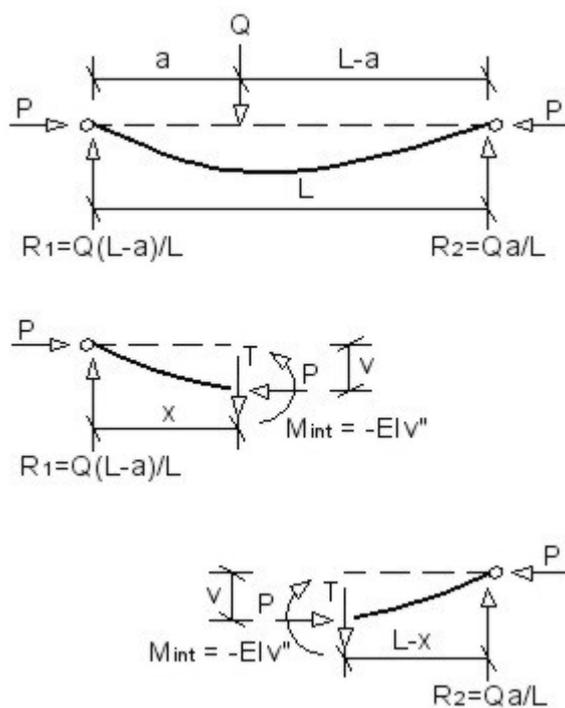


Figura 2.10: Viga-columna con carga lateral concentrada

Los momentos interno y externo a la barra son:

Momento externo:

$$M_{ext,1}(x) = P \cdot v_1(x) + \frac{Q(L-a)}{L} \cdot x, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.98)$$

$$M_{ext,2}(x) = P \cdot v_2(x) + \frac{Qa}{L} \cdot (L-x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.99)$$

Momento interno:

$$M_{int,1}(x) = -EI \cdot v_1''(x), \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.100)$$

$$M_{int,2}(x) = -EI \cdot v_2''(x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.101)$$

Igualando momentos se llega a las siguientes condiciones de equilibrio:

$$EIv_1''(x) + P \cdot v_1(x) + \frac{Q(L-a)}{L}x = 0, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.102)$$

$$EIv_2''(x) + P \cdot v_2(x) + \frac{Qa}{L}(L-x) = 0, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.103)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.104)$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir:

$$v_1''(x) + k^2v_1(x) + \frac{Q(L-a)}{LEI}x = 0, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.105)$$

$$v_2''(x) + k^2v_2(x) + \frac{Qa}{LEI}(L-x) = 0, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.106)$$

Las soluciones generales son:

$$v_1(x) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx - \frac{Q(L-a)}{LEIk^2}x, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.107)$$

$$v_2(x) = A_2 \sin kx + B_2 \cos kx - \frac{Qa}{LEIk^2}(L-x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.108)$$

Y sus respectivas derivadas:

$$v_1'(x) = A_1k \cos kx - B_1k \sin kx - \frac{Q(L-a)}{LEIk^2}, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.109)$$

$$v_2'(x) = A_2k \cos kx - B_2k \sin kx + \frac{Qa}{LEIk^2}, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.110)$$

$$v_1''(x) = -A_1k^2 \sin kx - B_1k^2 \cos kx, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.111)$$

$$v_2''(x) = -A_2k^2 \sin kx - B_2k^2 \cos kx, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.112)$$

Para conocer las constantes de integración aplicamos las condiciones de contorno:

$$v_1(0) = 0 \quad (2.113)$$

$$v_2(L) = 0 \quad (2.114)$$

Y las condiciones de continuidad:

$$v_1(a) = v_2(a) \quad (2.115)$$

$$v_1'(a) = v_2'(a) \quad (2.116)$$

Según esto, las constantes son:

$$A_1 = \frac{Q \sin[k(L-a)]}{EI k^3 \sin kL} \quad (2.117)$$

$$B_1 = 0 \quad (2.118)$$

$$A_2 = -\frac{Q \sin ka}{EI k^3 \tan kL} \quad (2.119)$$

$$B_2 = \frac{Q \sin ka}{EI k^3} \quad (2.120)$$

Con lo que las ecuaciones de la deformada finalmente quedan:

$$v_1(x) = \frac{Q \sin[k(L-a)]}{EI k^3 \sin kL} \sin kx - \frac{Q(L-a)}{LEI k^2} x, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.121)$$

$$v_2(x) = -\frac{Q \sin ka}{EI k^3 \tan kL} \sin kx + \frac{Q \sin ka}{EI k^3} \cos kx - \frac{Qa}{LEI k^2} (L-x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.122)$$

Y sus derivadas:

$$v_1'(x) = \frac{Q \sin[k(L-a)]}{EI k^2 \sin kL} \cos kx - \frac{Q(L-a)}{LEI k^2}, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.123)$$

$$v_2'(x) = -\frac{Q \sin ka}{EI k^2 \tan kL} \cos kx - \frac{Q \sin ka}{EI k^2} \sin kx + \frac{Qa}{LEI k^2}, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.124)$$

$$v_1''(x) = -\frac{Q \sin[k(L-a)]}{EI k \sin kL} \sin kx, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.125)$$

$$v_2''(x) = \frac{Q \sin ka}{EI k \tan kL} \sin kx - \frac{Q \sin ka}{EI k} \cos kx, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.126)$$

**Cálculo de los coeficientes de amplificación de la flecha,  $\Phi_f(x)$  y del momento,  $\Phi_m(x)$**

Para hallar la *amplificación de la flecha*, en primer lugar debemos conocer la deformada  $y(x)$ , generada únicamente por la carga lateral,  $Q$ , la cual se deduce del análisis de primer orden:

$$y_1(x) = \frac{Q(L-a)x}{6EIL} [2L(L-x) - (L-a)^2 - (L-x)^2], \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.127)$$

$$y_2(x) = \frac{Qa(L-x)}{6EIL} [2L(L-a) - (L-a)^2 - (L-x)^2], \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.128)$$

A partir de aquí calculamos el coeficiente de amplificación de la flecha:

$$\begin{aligned} \Phi_{f,1}(x) &= \frac{v_1(x)}{y_1(x)} = \frac{\frac{Q \sin[k(L-a)]}{EI k^3 \sin kL} \sin kx - \frac{Q(L-a)}{LEI k^2} x}{\frac{Q(L-a)x}{6EIL} [2L(L-x) - (L-a)^2 - (L-x)^2]} = \\ &= \frac{6 \left[ L \frac{\sin[k(L-a)]}{\sin kL} \sin kx - k(L-a)x \right]}{k^3(a-L)(a^2 - 2aL + x^2)x}, \quad [0 \leq x \leq a] \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{f,2}(x) &= \frac{v_2(x)}{y_2(x)} = \frac{-\frac{Q \sin ka}{EI k^3 \tan kL} \sin kx + \frac{Q \sin ka}{EI k^3} \cos kx - \frac{Qa}{LEI k^2} (L-x)}{\frac{Qa(L-x)}{6EIL} [2L(L-a) - (L-a)^2 - (L-x)^2]} = \\ &= \frac{6 \left[ L \frac{\sin ka}{\tan kL} \sin kx - L \sin ka \cos kx + ka(L-x) \right]}{k^3 a(L-x)(a^2 - 2Lx + x^2)}, \quad [a \leq x \leq L] \end{aligned} \quad (2.130)$$

Por tanto la ecuación de la amplificación queda:

$$v_1(x) = \Phi_{f,1}(x) \cdot y_1(x), \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.131)$$

$$v_2(x) = \Phi_{f,2}(x) \cdot y_2(x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.132)$$

Para hallar la *amplificación del momento* necesitamos calcular el momento total en la barra,  $M(x)$ , y el momento  $M_y(x)$ , producido únicamente por la carga lateral,  $Q$ :

$$M_1(x) = -EIv_1''(x) = \frac{Q \sin[k(L-a)]}{k \sin kL} \sin kx, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} M_2(x) &= -EIv_2''(x) = \\ &= -\frac{Q \sin ka}{k \tan kL} \sin kx + \frac{Q \sin ka}{k} \cos kx, \quad [a \leq x \leq L] \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$M_{y,1}(x) = -EIy_1''(x) = \frac{Q(L-a)x}{L}, \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.135)$$

$$M_{y,2}(x) = -EIy_2''(x) = \frac{Qa(L-x)}{L}, \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.136)$$

Según esto, el coeficiente de amplificación del momento es:

$$\begin{aligned} \Phi_{m,1}(x) &= \frac{M_1(x)}{M_{y,1}(x)} = \frac{\frac{Q \sin[k(L-a)]}{k \sin kL} \sin kx}{\frac{Q(L-a)x}{L}} = \\ &= \frac{L \sin[k(L-a)] \sin kx}{kx(L-a) \sin kL}, \quad [0 \leq x \leq a] \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{m,2}(x) &= \frac{M_2(x)}{M_{y,2}(x)} = \frac{-\frac{Q \sin ka}{k \tan kL} \sin kx + \frac{Q \sin ka}{k} \cos kx}{\frac{Qa(L-x)}{L}} = \\ &= \frac{L \sin ka \left( \frac{-1}{\tan kL} \sin kx + \cos kx \right)}{ka(L-x)}, \quad [a \leq x \leq L] \end{aligned} \quad (2.138)$$

Por tanto la ecuación de la amplificación queda:

$$M_1(x) = \Phi_{m,1}(x) \cdot M_{y,1}(x), \quad [0 \leq x \leq a] \quad (2.139)$$

$$M_2(x) = \Phi_{m,2}(x) \cdot M_{y,2}(x), \quad [a \leq x \leq L] \quad (2.140)$$

**Cálculo de la flecha y momento máximos,  $v_{\text{máx}}$  y  $M_{\text{máx}}$** 

Para calcular la flecha máxima amplificada y el momento máximo correspondiente a esa flecha, bastaría con buscar la abscisa,  $x$ , tal que  $v'(x) = 0$  y  $M'(x) = 0$ . No obstante, estos valores serán diferentes dependiendo del punto donde se encuentre aplicada la carga lateral,  $Q$ . Se puede comprobar fácilmente que el máximo absoluto para la flecha y el momento se producen cuando la carga  $Q$  está centrada ( $a = L/2$ ). A su vez, el valor de la abscisa que maximiza las funciones es  $x = L/2$ .

Según esto, sólo tenemos que tomar las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior y sustituir en ellas  $a = L/2$ , y  $x = L/2$ :

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{QL^3}{48EI} \quad (2.141)$$

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \Phi_f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{12(2 \tan \frac{kL}{2} - kL)}{k^3 L^3} \quad (2.142)$$

$$v_{\text{máx}} = v\left(\frac{L}{2}\right) = \left[ \frac{12(2 \tan \frac{kL}{2} - kL)}{k^3 L^3} \right] \cdot \frac{QL^3}{48EI} = \frac{Q(2 \tan \frac{kL}{2} - kL)}{4EI k^3} \quad (2.143)$$

Al igual que vimos anteriormente para la barra cargada uniformemente, en este caso también podemos simplificar  $\Phi_{f,\text{máx}}$  de manera bastante aproximada mediante el desarrollo en serie de la tangente, y haciendo el cambio  $k = \pi/L\sqrt{P/P_p}$ . El procedimiento es similar al desarrollado en la ecuación (2.77) y sucesivas. Siguiendo este procedimiento se obtiene el *coeficiente de amplificación de la flecha máxima*:

$$\Phi_{f,\text{máx}} \simeq \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.144)$$

De manera que finalmente podemos escribir:

$$v_{\text{máx}} = \Phi_{f,\text{máx}} \cdot y_{\text{máx}} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \frac{QL^3}{48EI} \quad (2.145)$$

Similarmente podemos obtener el momento máximo:

$$M_{y,\text{máx}} = M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{QL}{4} \quad (2.146)$$

$$\Phi_{m,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \Phi_m \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{kL}{2}}{kL} \quad (2.147)$$

$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = M \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{QL}{4} \cdot \left[ \frac{2 \tan \frac{kL}{2}}{kL} \right] = \frac{Q \tan \frac{kL}{2}}{2k} \quad (2.148)$$

Volviendo a desarrollar en serie la tangente incluída en  $\Phi_{m,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ , tenemos finalmente el *coeficiente de amplificaci3n del momento m\acute{a}ximo*:

$$\Phi_{m,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \simeq \frac{1 - 0,2 \left( \frac{P}{P_p} \right)}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \quad (2.149)$$

Que hace que podamos escribir:

$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \Phi_{m,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \cdot M_{y,\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \left[ \frac{1 - 0,2 \left( \frac{P}{P_p} \right)}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] \frac{QL}{4} \quad (2.150)$$

### C) Viga-columna sometida a carga axial y momentos en ambos extremos

En este apartado consideraremos una viga-columna semejante a las de los dos apartados anteriores, sometida a una carga axial,  $P$ . Pero en esta ocasi3n, en vez de estudiar la combinaci3n de la carga  $P$  con cargas laterales, consideraremos que existen unos momentos  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos de la barra, y analizaremos como interactúan con la carga axial.

Según el sentido de actuaci3n de los momentos, tendremos una situaci3n de *doble curvatura*, si los dos momentos giran en el mismo sentido, o *simple curvatura*, si el sentido de giro de los momentos es opuesto. Estudiaremos en primer lugar el caso de doble curvatura, y los resultados obtenidos ser\an v\alidos para el caso de simple curvatura sin m\as que cambiar el signo a uno de los momentos extremos.

#### Caso de doble curvatura

El esquema del problema se muestra en la Figura 2.11. Los momentos interno y externo a la barra son:

$$\begin{aligned} \text{Momento externo: } M_{ext}(x) &= P \cdot v(x) - \frac{M_1 + M_2}{L} \cdot x + M_1 \\ \text{Momento interno: } M_{int}(x) &= -EI \cdot v''(x) \end{aligned}$$

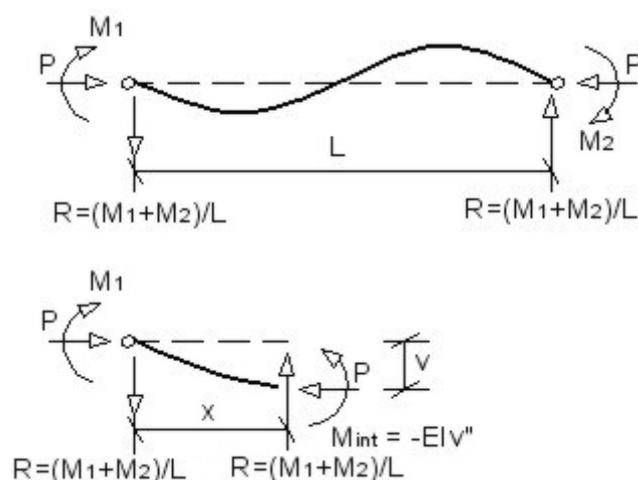


Figura 2.11: Viga-columna con momentos extremos (doble curvatura)

Igualando ambos momentos se llega a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$EIv''(x) + Pv(x) - \frac{M_1 + M_2}{L}x + M_1 = 0 \quad (2.151)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.152)$$

La ecuación de equilibrio queda:

$$v''(x) + k^2v(x) - \frac{M_1 + M_2}{LEI}x + \frac{M_1}{EI} = 0 \quad (2.153)$$

Cuya solución general es:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_1 + M_2}{LEIk^2}x - \frac{M_1}{EI k^2} \quad (2.154)$$

Y sus respectivas derivadas:

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx + \frac{M_1 + M_2}{LEIk^2} \quad (2.155)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx \quad (2.156)$$

$$v'''(x) = -Ak^3 \cos kx + Bk^3 \sin kx \quad (2.157)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(0) = 0 \quad (2.158)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.159)$$

De donde obtenemos:

$$A = -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k^2 \sin kL} \quad (2.160)$$

$$B = \frac{M_1}{EI k^2} \quad (2.161)$$

Quedando finalmente la ecuación de la deformada:

$$\begin{aligned} v(x) = & -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k^2 \sin kL} \sin kx + \frac{M_1}{EI k^2} \cos kx + \\ & + \frac{M_1 + M_2}{LEI k^2} x - \frac{M_1}{EI k^2} \end{aligned} \quad (2.162)$$

Y sus respectivas derivadas:

$$v'(x) = -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k \sin kL} \cos kx - \frac{M_1}{EI k} \sin kx + \frac{M_1 + M_2}{LEI k^2} \quad (2.163)$$

$$v''(x) = \frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI \sin kL} \sin kx - \frac{M_1}{EI} \cos kx \quad (2.164)$$

$$v'''(x) = \frac{k(M_1 \cos kL + M_2)}{EI \sin kL} \cos kx + \frac{kM_1}{EI} \sin kx \quad (2.165)$$

Ya estamos en disposición de estudiar la amplificación generada por la carga axial,  $P$ . Para conocer la *amplificación de la flecha*, debemos conocer cual es la deformada  $y(x)$ , producida únicamente por los momentos en los extremos, la cual se deduce del análisis de primer orden:

$$y(x) = \frac{x}{2EI} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{3L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 - M_2)L}{3} \right] \quad (2.166)$$

Y ya podemos hallar el coeficiente de amplificación de la flecha:

$$\Phi_f(x) = \frac{v(x)}{y(x)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k^2 \sin kL} \sin kx + \frac{M_1}{EI k^2} \cos kx + \frac{M_1 + M_2}{LEI k^2} x - \frac{M_1}{EI k^2}}{\frac{x}{2EI} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{3L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 - M_2)L}{3} \right]} = \\
 &= \frac{-\frac{M_1 \cos kL + M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx + \frac{M_1 + M_2}{L} x - M_1}{\frac{k^2 x}{2} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{3L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 - M_2)L}{3} \right]} \quad (2.167)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el momento en la barra viene dado por la expresión:

$$M(x) = -EIv''(x) = -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx \quad (2.168)$$

Para conocer la *amplificación del momento*, debemos conocer el momento flector  $M_y(x)$  generado únicamente por los momentos en los extremos de la barra. Este puede ser calculado como:

$$M_y(x) = -EIy''(x) = -\frac{M_1 + M_2}{L} x + M_1 \quad (2.169)$$

Y según esto, el coeficiente de amplificación del momento es:

$$\Phi_m(x) = \frac{M(x)}{M_y(x)} = \frac{-\frac{M_1 \cos kL + M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx}{-\frac{M_1 + M_2}{L} x + M_1} \quad (2.170)$$

Es de interés también obtener la flecha máxima y el momento máximo con sus correspondientes amplificaciones. Para ello, en principio debemos buscar la abcisa,  $x$ , tal que se maximicen ambas funciones, lo cual implica que  $y'(x) = 0$  y  $v'(x) = 0$ , para la flecha, y  $M'_y(x) = 0$  y  $M'(x) = 0$ , para el momento.

La ecuaciones de primer orden, permiten buscar el máximo con bastante facilidad:

$$\begin{aligned}
 y'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2EI} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 - M_2)L}{3} \right] = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x_{\text{máx},f} = \frac{3LM_1 + \sqrt{3L} \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2}}{3(M_1 + M_2)} \quad (2.171)
 \end{aligned}$$

Luego la flecha máxima será:

$$y_{\text{máx}} = y(x_{\text{máx},f}) =$$

$$= \frac{x_{\text{máx},f}}{2EI} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{3L} x_{\text{máx},f}^2 - M_1 x_{\text{máx},f} + \frac{(2M_1 - M_2)L}{3} \right] \quad (2.172)$$

Si suponemos el caso particular de que  $M_1 = M_2 = M$ , la expresión anterior se simplifica:

$$y_{\text{máx}}^{(M_1=M_2)} = \frac{L^2 M}{36\sqrt{3}EI} \quad (2.173)$$

Si sólo  $M_1$  o  $M_2$  estuvieran presentes :

$$y_{\text{máx}}^{(M_2=0)} = y_{\text{máx}}^{(M_1=0)} = \frac{L^2 M}{9\sqrt{3}EI} \quad (2.174)$$

En cuanto al momento  $M_y(x)$ , al ser su ecuación una recta, el máximo coincidirá con uno de los momentos extremos, que será el  $M_1$  o el  $M_2$  según el caso. Por tanto tendremos que:

$$x_{\text{máx},m} = 0, [M_1 > M_2] \Rightarrow M_{y,\text{máx}} = M(0) = M_1 \quad (2.175)$$

$$x_{\text{máx},m} = L, [M_1 < M_2] \Rightarrow M_{y,\text{máx}} = M(L) = M_2 \quad (2.176)$$

En cuanto a la flecha y momento máximos amplificados, deberíamos hallar igualmente la abscisa,  $x$ , que maximizara cada una de las funciones. La flecha máxima implica que  $v'(x) = 0$ , y por tanto:

$$v'(x) = -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k \sin kL} \cos kx - \frac{M_1}{EI k} \sin kx + \frac{M_1 + M_2}{LEIk^2} = 0 \quad (2.177)$$

Despejando obtendríamos  $x_{\text{máx},f}$ , aunque surge una expresión no manejable que requiere el empleo de cálculo numérico. Finalmente la flecha máxima sería:

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} = v(x_{\text{máx},f}) = & -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k^2 \sin kL} \sin kx_{\text{máx},f} + \frac{M_1}{EI k^2} \cos kx_{\text{máx},f} + \\ & + \frac{M_1 + M_2}{LEIk^2} x_{\text{máx},f} - \frac{M_1}{EI k^2} \end{aligned} \quad (2.178)$$

El momento máximo implica que  $M'(x) = 0 \Rightarrow -EIv'''(x) = 0$ , y por tanto:

$$v'''(x) = \frac{k(M_1 \cos kL + M_2)}{EI \sin kL} \cos kx + \frac{kM_1}{EI} \sin kx = 0 \quad (2.179)$$

De donde:

$$\tan kx_{\text{máx},m} = -\frac{(M_1 \cos kL + M_2)}{M_1 \sin kL} \quad (2.180)$$

De manera que:

$$x_{\text{máx},m} = \frac{1}{k} \arctan \left[ -\frac{(M_1 \cos kL + M_2)}{M_1 \sin kL} \right] \quad (2.181)$$

En lugar de sustituir  $x_{\text{máx},m}$  en  $M(x)$ , ya que es algo engorroso, hallaremos  $\sin kx_{\text{máx},m}$  y  $\cos kx_{\text{máx},m}$ , lo cual se consigue normalizando la ecuación (2.180):

$$\begin{aligned} \tan kx_{\text{máx},m} &= \frac{\sin kx_{\text{máx},m}}{\cos kx_{\text{máx},m}} = -\frac{\frac{(M_1 \cos kL + M_2)}{\sqrt{(M_1 \cos kL + M_2)^2 + (M_1 \sin kL)^2}}}{\frac{M_1 \sin kL}{\sqrt{(M_1 \cos kL + M_2)^2 + (M_1 \sin kL)^2}}} = \\ &= -\frac{\frac{(M_1 \cos kL + M_2)}{\sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}}}{\frac{M_1 \sin kL}{\sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}}} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Por tanto:

$$\sin kx_{\text{máx},m} = \frac{(M_1 \cos kL + M_2)}{\sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}} \quad (2.183)$$

$$\cos kx_{\text{máx},m} = \frac{-M_1 \sin kL}{\sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}} \quad (2.184)$$

El momento máximo se puede ya calcular fácilmente:

$$\begin{aligned} M_{\text{máx}} &= -EIv''_{\text{máx}} = \\ &= -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{\sin kL} \sin kx_{\text{máx},m} + M_1 \cos kx_{\text{máx},m} = \\ &= \frac{-(M_1 \cos kL + M_2)^2}{\sin kL \sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}} - \frac{M_1^2 \sin kL}{\sqrt{M_1^2 + 2M_1 M_2 \cos kL + M_2^2}} = \\ &= -M_2 \left[ \sqrt{\frac{(M_1/M_2)^2 + 2(M_1/M_2) \cos kL + 1}{\sin^2 kL}} \right] \end{aligned} \quad (2.185)$$

Podemos decir que el factor que multiplica a  $M_2$ , es el *coeficiente de amplificación del momento máximo* para este caso, en el cual  $M_2$  es el máximo

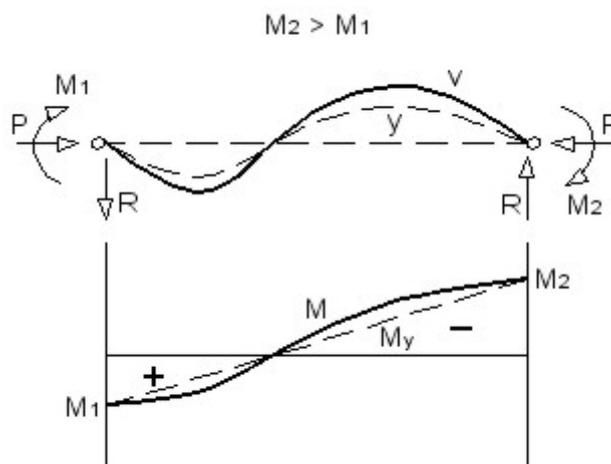


Figura 2.12: Amplificación de la flecha y el momento

momento de los dos aplicados en los extremos de la barra. También eliminamos el signo negativo, el cual simplemente nos indica que en la barra las fibras traccionadas son las superiores. Así pues, podemos escribir:

$$M_{\text{máx}} = \Phi_{m,\text{máx}} \cdot M_2 \quad (2.186)$$

Esta fórmula nos dice cual es el momento máximo amplificado, pero sólo matemáticamente, y no físicamente, ya que la ecuación tiene validez para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto, para conocer el verdadero momento máximo en la barra, debemos ver si  $x_{\text{máx},m}$  se encuentra en el intervalo  $[0, L]$ , ya que si no, la ecuación (2.186) no es aplicable, y en ese caso el momento máximo será el obtenido del análisis de primer orden, es decir, el mayor de los dos momentos extremos (2.175) y (2.176).

En la Figura 2.12 se puede ver gráficamente la correspondiente amplificación de flecha y momento. Se ha tomado la hipótesis de que  $M_2 > M_1$ .

### Caso de simple curvatura

En este caso, los dos momentos flectores en los extremos tienen sentidos de giro opuestos, generándose una deformada simple y simétrica. El esquema del problema se muestra en la Figura 2.13.

Los resultados obtenidos para este caso son semejantes a los del caso de doble curvatura, pero con el signo cambiado en uno de los momentos extremos, por ejemplo el  $M_2$ .

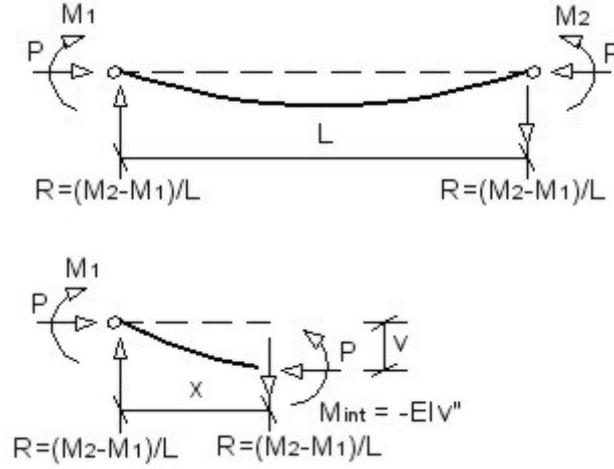


Figura 2.13: Viga-columna con momentos extremos (simple curvatura)

Las ecuaciones de la deformada y la amplificación correspondiente son:

$$v(x) = -\frac{M_1 \cos kL - M_2}{EI k^2 \sin kL} \sin kx + \frac{M_1}{EI k^2} \cos kx + \frac{M_1 - M_2}{LEI k^2} x - \frac{M_1}{EI k^2} \quad (2.187)$$

$$y(x) = \frac{x}{2EI} \left[ \frac{(M_1 - M_2)}{3L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 + M_2)L}{3} \right] \quad (2.188)$$

$$\Phi_f(x) = \frac{-\frac{M_1 \cos kL - M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx + \frac{M_1 - M_2}{L} x - M_1}{\frac{k^2 x}{2} \left[ \frac{(M_1 - M_2)}{3L} x^2 - M_1 x + \frac{(2M_1 + M_2)L}{3} \right]} \quad (2.189)$$

Las ecuaciones de los momentos y la amplificación son:

$$M(x) = -\frac{M_1 \cos kL - M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx \quad (2.190)$$

$$M_y(x) = -\frac{M_1 - M_2}{L} x + M_1 \quad (2.191)$$

$$\Phi_m(x) = \frac{-\frac{M_1 \cos kL - M_2}{\sin kL} \sin kx + M_1 \cos kx}{-\frac{M_1 - M_2}{L} x + M_1} \quad (2.192)$$

También es de interés el momento máximo amplificado en la barra:

$$M_{\text{máx}} = M_2 \left[ \sqrt{\frac{(M_1/M_2)^2 - 2(M_1/M_2) \cos kL + 1}{\sin^2 kL}} \right] \quad (2.193)$$

Que se puede escribir como:

$$M_{\text{máx}} = \Phi_{m,\text{máx}} \cdot M_2 \quad (2.194)$$

Siendo de nuevo  $M_2$  el momento máximo de los dos aplicados en los extremos de la barra.

### El momento equivalente

La expresión del momento máximo amplificado para simple curvatura (2.193), en el caso de que  $M_1 = M_2 = M$ , toma el valor:

$$M_{\text{máx}} = M \left[ \sqrt{\frac{2(1 - \cos kL)}{\sin^2 kL}} \right] \quad (2.195)$$

Por otra parte, partiendo de una situación en la que  $M_1$  sea distinto a  $M_2$ , con  $M_2 > M_1$ , y exista simple o doble curvatura, podemos simplificar el problema asumiendo que el momento máximo amplificado será equivalente al producido por dos momentos extremos iguales entre sí, y trabajando en simple curvatura (giros opuestos), a los que llamaremos *momentos equivalentes*,  $M_{eq}$ .

Además en este caso equivalente, el momento máximo se produce por simetría en  $x = L/2$ , lo cual simplifica bastante el problema (Figura 2.14).

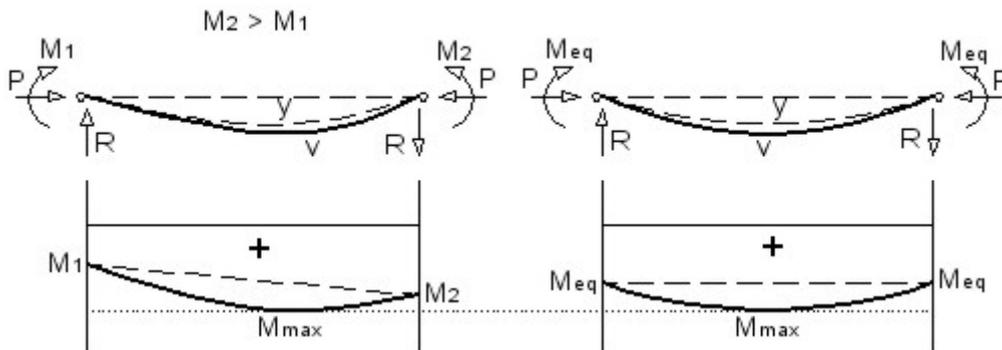


Figura 2.14: Aplicación del momento equivalente

Según esto, el momento equivalente puede calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 M_{\text{máx}} &= \Phi_{m,\text{máx}} \cdot |M_2| = |M_2| \left[ \sqrt{\frac{(M_1/M_2)^2 \pm 2(M_1/M_2) \cos kL + 1}{\sin^2 kL}} \right] = \\
 &= M_{eq} \left[ \sqrt{\frac{2(1 - \cos kL)}{\sin^2 kL}} \right] \quad (2.196)
 \end{aligned}$$

En el coeficiente de amplificación  $\Phi_{m,\text{máx}}$ , aparece un signo variable, que será positivo (+) si se trata de doble curvatura, y negativo (-) si es simple curvatura.

Despejando:

$$M_{eq} = \left[ \sqrt{\frac{(M_1/M_2)^2 \pm 2(M_1/M_2) \cos kL + 1}{2(1 - \cos kL)}} \right] |M_2| = C_m |M_2| \quad (2.197)$$

Siendo  $C_m$  el *coeficiente del momento equivalente*, el cual depende de los momentos extremos  $M_1$  y  $M_2$ , y de  $k$ , es decir, de la carga axial,  $P$ . Varios autores han intentado conseguir expresiones aproximadas para  $C_m$ , de manera que este no dependa del axial. Las expresiones más usadas son las de Massonnet y Austin:

$$C_m = \sqrt{0,3(M_1/M_2)^2 \pm 0,4(M_1/M_2) + 0,3} \quad (\text{Massonnet}) \quad (2.198)$$

$$C_m = 0,6 \pm 0,4(M_1/M_2) \geq 0,4 \quad (\text{Austin}) \quad (2.199)$$

En base a estas expresiones, podemos elaborar un método rápido y sencillo para el cálculo del momento máximo amplificado a partir del momento equivalente, y para cualquier valor de la carga axial. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Calcular el coeficiente del momento equivalente,  $C_m$ , usando las ecuaciones (2.198) o (2.199).
- Calcular el momento equivalente, multiplicando  $C_m$  por el valor absoluto del momento máximo de los dos aplicados en los extremos, que en nuestra notación es  $M_2$ :

$$M_{eq} = C_m |M_2| \quad (2.200)$$

- Calcular el momento máximo amplificado aplicando la ecuación:

$$M_{\text{máx}} = M_{eq} \left[ \sqrt{\frac{2(1 - \cos kL)}{\sin^2 kL}} \right] \quad (2.201)$$

Esta ecuación a su vez puede ser simplificada. Si aplicamos identidades trigonométricas:

$$1 - \cos kL = 2 \sin^2 \frac{kL}{2} \quad (2.202)$$

$$\sin^2 kL = 4 \sin^2 \frac{kL}{2} \cos^2 \frac{kL}{2} \quad (2.203)$$

Y sustituimos estas dos expresiones en la ecuación (2.201), se llega a:

$$M_{\text{máx}} = M_{eq} \sec \frac{kL}{2} \quad (2.204)$$

Si desarrollamos en serie la secante de esta ecuación, al igual que hemos hecho en apartados anteriores, y haciendo el cambio de variable  $k = \pi/L\sqrt{P/P_p}$ , tenemos que:

$$M_{\text{máx}} = M_{eq} \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \quad (2.205)$$

Y sustituyendo el momento equivalente por su correspondiente expresión en función de  $M_2$ , se obtiene:

$$M_{\text{máx}} = \left[ \frac{C_m}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] |M_2| \quad (2.206)$$

De esta manera podemos concluir que el factor entre corchetes es una aproximación sencilla al *coeficiente de amplificación del momento máximo*,  $\Phi_{m,\text{máx}}$ , de tal manera que:

$$M_{\text{máx}} = \Phi_{m,\text{máx}} \cdot |M_2| \quad (2.207)$$

#### D) Método de pendiente-desplazamiento. Funciones de estabilidad

Este método se fundamenta en la búsqueda de una relación entre los momentos flectores actuantes en los extremos de una barra,  $M_1$  y  $M_2$ , el axial,  $P$ , y los correspondientes giros resultantes en dichos extremos,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Partiendo de los resultados obtenidos en el apartado C), es posible obtener las funciones que relacionen todas estas variables entre sí.

Estudiaremos como caso general la situación de doble curvatura, teniendo en cuenta que los resultados obtenidos, serán válidos para el caso de simple curvatura sin más que cambiar el signo de uno de los momentos extremos. El esquema del problema se muestra en la Figura 2.15.

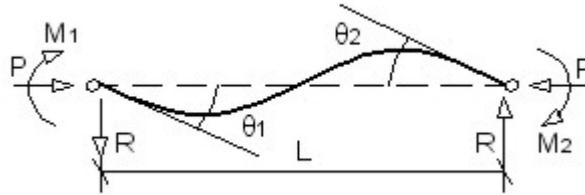


Figura 2.15: Solicitaciones y giros en los extremos de la barra

La ecuación de la deformada para la viga-columna sometida a axial y flectores en los extremos es:

$$v(x) = -\frac{M_1 \cos kL + M_2}{EI k^2 \sin kL} \sin kx + \frac{M_1}{EI k^2} \cos kx + \frac{M_1 + M_2}{LEI k^2} x - \frac{M_1}{EI k^2} \quad (2.208)$$

Reagrupando y sacando factor común  $M_1$  y  $M_2$ , nos queda:

$$v(x) = -\frac{1}{EI k^2} \left[ \frac{\cos kL}{\sin kL} \sin kx - \cos kx - \frac{x}{L} + 1 \right] M_1 - \frac{1}{EI k^2} \left[ \frac{1}{\sin kL} \sin kx - \frac{x}{L} \right] M_2 \quad (2.209)$$

La primera derivada es:

$$v'(x) = -\frac{1}{EI k} \left[ \frac{\cos kL}{\sin kL} \cos kx - \sin kx - \frac{1}{kL} \right] M_1 - \frac{1}{EI k} \left[ \frac{1}{\sin kL} \cos kx - \frac{1}{kL} \right] M_2 \quad (2.210)$$

Y como es sabido, el giro producido en cualquier punto,  $x$ , de la barra, viene dado por  $v'(x)$ . Así pues, los giros en los puntos 1 ( $x = 0$ ), y 2 ( $x = L$ ), serán respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = v'(0) &= -\frac{1}{EI k} \left[ \frac{\cos kL}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right] M_1 - \frac{1}{EI k} \left[ \frac{1}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right] M_2 = \\
 &= \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL \cos kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] M_1 + \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] M_2 \quad (2.211)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2 = v'(L) &= -\frac{1}{EI k} \left[ \frac{1}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right] M_1 - \frac{1}{EI k} \left[ \frac{\cos kL}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right] M_2 = \\
 &= \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] M_1 + \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL \cos kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] M_2 \quad (2.212)
 \end{aligned}$$

Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

Donde:

$$f_{11} = f_{22} = \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL \cos kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] \quad (2.214)$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{L}{EI} \left[ \frac{\sin kL - kL}{(kL)^2 \sin kL} \right] \quad (2.215)$$

Si despejamos los momentos extremos:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

Que invirtiendo la matriz de transformación queda:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.217)$$

Donde:

$$c_{11} = c_{22} = \frac{EI}{L} \left[ \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \right] \quad (2.218)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{EI}{L} \left[ \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \right] \quad (2.219)$$

Finalmente, deshaciendo las matrices y recopilando términos podemos escribir las *ecuaciones pendiente-desplazamiento* para la barra:

$$M_1 = \frac{EI}{L}(s_{ii}\theta_1 + s_{ij}\theta_2) \quad (2.220)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}(s_{ji}\theta_1 + s_{jj}\theta_2) \quad (2.221)$$

Donde:

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{c_{11}L}{EI} = \frac{c_{22}L}{EI} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.222)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{c_{12}L}{EI} = \frac{c_{21}L}{EI} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.223)$$

Estas funciones  $s_{ii}$ ,  $s_{ij}$ ,  $s_{ji}$ ,  $s_{jj}$ , son las llamadas *funciones de estabilidad*, propuestas por James en 1935, las cuales dependen exclusivamente del valor de  $k$ , es decir, del axial  $P$ . Estas funciones están ampliamente descritas en la bibliografía [8].

Por tanto, las funciones de estabilidad incluyen en la relación “momento-giro”, el efecto del axial de compresión,  $P$ .

En el caso en el que el axial  $P$  no está presente, es decir,  $k \rightarrow 0$ , las funciones de estabilidad pasan a ser simples coeficientes de rigidez, tomando los siguientes valores:

$$\lim_{k \rightarrow 0} s_{ii} = \lim_{k \rightarrow 0} s_{jj} = 4 \quad (2.224)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} s_{ij} = \lim_{k \rightarrow 0} s_{ji} = 2 \quad (2.225)$$

Según esto, las ecuaciones (2.220) y (2.221) se pueden escribir como:

$$M_1 = \frac{EI}{L}(4\theta_1 + 2\theta_2) \quad (2.226)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}(2\theta_1 + 4\theta_2) \quad (2.227)$$

Que son justamente las ecuaciones “momento-giro” para el caso de una barra sometida a momentos extremos y en ausencia de axiales, ampliamente descritas en la bibliografía sobre resistencia de materiales.

### Ecuaciones pendiente-desplazamiento modificadas

En el caso de que haya posibilidad de desplazamiento lateral de uno de los extremos de la barra, tendremos que tenerlo en cuenta a la hora del análisis de pendiente-desplazamiento. Siguiendo el mismo procedimiento que anteriormente, y basándonos en el esquema de la Figura 2.16, llegamos a las siguientes relaciones:

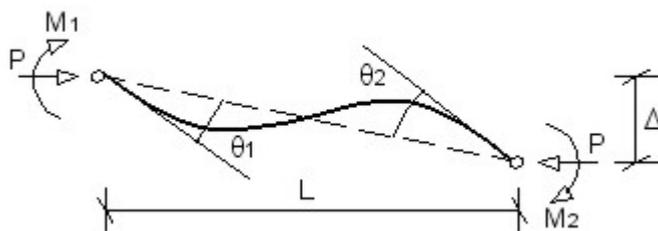


Figura 2.16: Barra con posibilidad de desplazamiento lateral

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{L} \left[ s_{ii} \left( \theta_1 - \frac{\Delta}{L} \right) + s_{ij} \left( \theta_2 - \frac{\Delta}{L} \right) \right] = \\ &= \frac{EI}{L} \left[ s_{ii}\theta_1 + s_{ij}\theta_2 - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L} \right] \end{aligned} \quad (2.228)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{EI}{L} \left[ s_{ji} \left( \theta_1 - \frac{\Delta}{L} \right) + s_{jj} \left( \theta_2 - \frac{\Delta}{L} \right) \right] = \\ &= \frac{EI}{L} \left[ s_{ji}\theta_1 + s_{jj}\theta_2 - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L} \right] \end{aligned} \quad (2.229)$$

Y en el caso de no existir axial, tendríamos:

$$M_1 = \frac{EI}{L} \left( 4\theta_1 + 2\theta_2 - 6\frac{\Delta}{L} \right) \quad (2.230)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L} \left( 2\theta_1 + 4\theta_2 - 6\frac{\Delta}{L} \right) \quad (2.231)$$

**2.1.1.7. Columnas con restricciones elásticas en los extremos**

Hasta ahora hemos considerado que la barra tiene ciertas condiciones de sustentación particulares en sus extremos, tales como: articulación, empostramiento, o extremo libre. Sin embargo, en una barra conectada a una red estructural no existirá ninguna de estas vinculaciones teóricas, sino que las características en los extremos corresponderán a una cierta combinación de las tres condiciones anteriores.

Por tanto, y aunque este trabajo está centrado en la barra aislada, es conveniente conocer cómo se comportaría una barra cuyos extremos están conectados a otras barras o elementos resistentes, ya que para modelizar el pandeo en la estructura completa, sólo tendremos que definir correctamente las características concretas de las conexiones en los nudos o extremos de las barras.

Para resolver este problema usaremos el método estático, aunque también existe la posibilidad de usar el método energético. Consideraremos una barra de longitud  $L$ , inercia  $I$ , y extremos con una restricción elástica al giro que modelizaremos como un resorte de constante recuperadora  $R_k$ . En los extremos actúa una carga axial,  $P$  (Figura 2.17).

Los momentos en la barra son:

$$\text{Momento externo: } M_{ext}(x) = P \cdot v(x) + T \cdot x - M_A$$

$$\text{Momento interno: } M_{int}(x) = -EI \cdot v''(x)$$

Igualando ambos momentos obtenemos la condición de equilibrio:

$$EIv''(x) + Pv(x) + Tx - M_A = 0 \tag{2.232}$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{2.233}$$

Tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$v''(x) + k^2v(x) + \frac{T}{EI}x - \frac{M_A}{EI} = 0 \tag{2.234}$$

Cuya solución general es:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx - \frac{T}{P}x + \frac{M_A}{P} \tag{2.235}$$

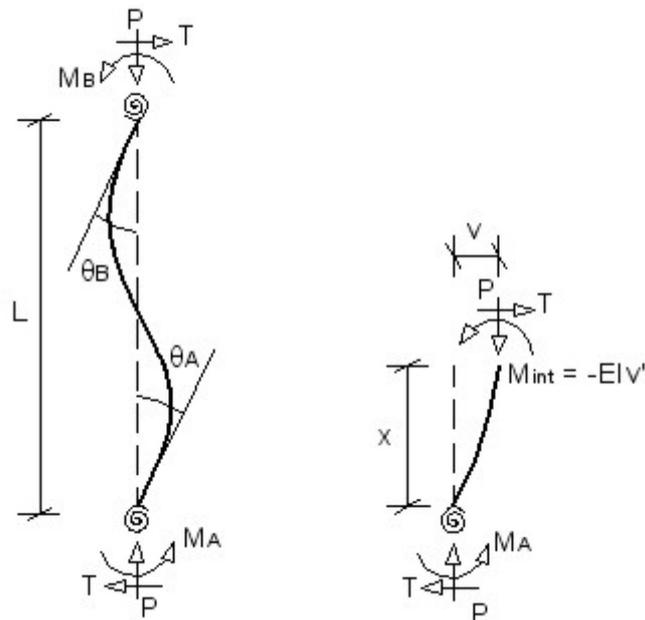


Figura 2.17: Barra con restricciones elásticas

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , debemos aplicar las condiciones de contorno particulares como hemos venido haciendo hasta ahora.

Se puede ver también como esta ecuación representa un caso genérico, cuyas soluciones particulares corresponden a diferentes casos ya estudiados, tales como los de Euler.

Por tanto, tenemos una ecuación general que permite particularizar las restricciones y reacciones en los extremos de la columna, modelizando así las conexiones de la barra con otros elementos de una red estructural.

Para definir las condiciones de contorno y obtener la carga de pandeo para la barra, necesitamos definir las características elásticas de los resortes extremos, lo que equivale a establecer las rigideces de los nudos o uniones entre barras. En principio, partimos de las siguientes relaciones:

$$M_A = R_{kA}\theta_A \tag{2.236}$$

$$M_B = R_{kB}\theta_B \tag{2.237}$$

Es decir, debido al efecto de la carga axial,  $P$ , en los extremos se producen

momentos ( $M_A$  y  $M_B$ ) y giros ( $\theta_A$  y  $\theta_B$ ) los cuales dependen, además del axial  $P$ , de las rigideces de los nudos extremos ( $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ ). En función de estas rigideces, los momentos y los giros pueden variar en un rango muy amplio para un mismo valor de  $P$ . Como casos extremos tenemos los siguientes:

- Si  $R_k = 0$ , estamos en el caso de una articulación perfecta o un extremo libre, por lo que el momento es nulo y el giro es máximo al no haber restricción alguna para este.
- Si  $R_k = \infty$ , se tratará de un empotramiento perfecto, con lo que el giro es nulo y el momento será máximo.

Por tanto, si aplicamos las ecuaciones (2.236) y (2.237) como condiciones de contorno, teniendo en cuenta que el giro en la barra se identifica con la primera derivada de la flecha, tenemos que:

$$v'(0) = \theta_A = \frac{M_A}{R_{kA}} \quad (2.238)$$

$$v'(L) = \theta_B = \frac{M_B}{R_{kB}} \quad (2.239)$$

Por otra parte, también podemos establecer como ecuaciones de contorno los desplazamientos en los extremos de la barra:

$$v(0) = v_A = \delta_A \quad (2.240)$$

$$v(L) = v_B = \delta_B \quad (2.241)$$

Si aplicamos las cuatro condiciones y despejamos los momentos extremos en función de los giros, se llega fácilmente a las ya conocidas ecuaciones pendiente-desplazamiento (2.220), (2.221), (2.228) y (2.229) que se analizaron en la sección anterior, y que nos servirán ahora para el análisis de pandeo de la barra.

Ya que hemos definido el modo de trabajo, pasaremos a analizar dos casos de interés, los cuales fueron desarrollados por Julian y Lawrence, y pueden ser consultados en la bibliografía [8].

**A) Red estructural intraslacional**

Supongamos una red estructural formada por barras de longitud  $L_i$ , e inercia  $I_i$ , y conectadas entre si mediante nudos rígidos, como se muestra en la Figura 2.18. Además la estructura es intraslacional, es decir, no hay posibilidad de desplazamiento lateral o de piso de los nudos. Los autores han demostrado que si la estructura es intraslacional, las barras que la componen pandearán en simple curvatura. Los giros en todos los extremos de las vigas se consideran idénticos, y los giros en los extremos de las columnas son alternados (2.18).

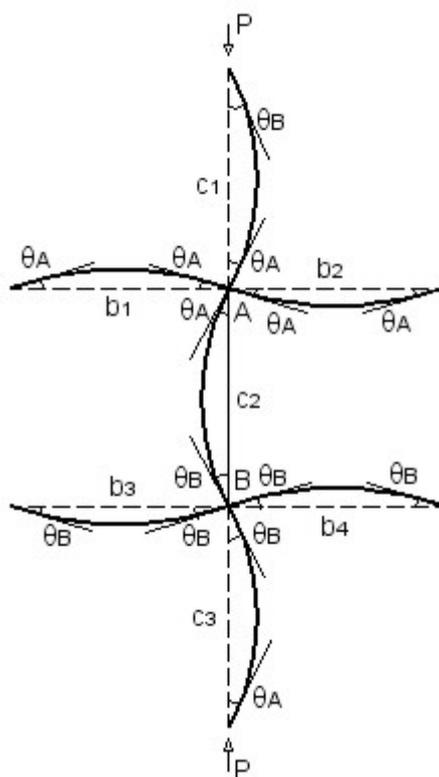


Figura 2.18: Red estructural intraslacional

Existe una carga axial vertical,  $P$ , que comprime por sus extremos exteriores a las columnas  $c1$  y  $c3$ . Nuestro objetivo es estudiar como pandea la columna  $c2$ , comprendida entre los nudos  $A$  y  $B$ .

Para el análisis, como ya se ha comentado, vamos a usar las ecuaciones pendiente-desplazamiento aplicadas en los nudos  $A$  y  $B$ :

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \quad (2.242)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \quad (2.243)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} (s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B) \quad (2.244)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} (s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B) \quad (2.245)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4\theta_A - 2\theta_A) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} 2\theta_A \quad (2.246)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4\theta_A - 2\theta_A) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} 2\theta_A \quad (2.247)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4\theta_B - 2\theta_B) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} 2\theta_B \quad (2.248)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4\theta_B - 2\theta_B) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} 2\theta_B \quad (2.249)$$

La condición de equilibrio en el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (2.250)$$

Despejando el momento correspondiente a la columna  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (2.251)$$

Y sustituyendo en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros:

$$\begin{aligned}
 (M_A)_{c2} &= - \left( \frac{EI}{L} \right)_{b1} 2\theta_A - \left( \frac{EI}{L} \right)_{b2} 2\theta_A - \left( \frac{EI}{L} \right)_{c1} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) = \\
 &= - \left[ \left( \frac{EI}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{b2} \right] 2\theta_A - \left( \frac{EI}{L} \right)_{c1} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \quad (2.252)
 \end{aligned}$$

Por otra parte, de la ecuación (2.243) tenemos que:

$$(s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) = \frac{(M_A)_{c2}}{\left( \frac{EI}{L} \right)_{c2}} \quad (2.253)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.252) y reagrupando queda:

$$(M_A)_{c2} = -2 \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2} \frac{\left( \frac{EI}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{b2}}{\left( \frac{EI}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2}} \theta_A \quad (2.254)$$

Ecuación que podemos generalizar para cualquier número de vigas y columnas que concurren en el nudo  $A$ :

$$(M_A)_{c2} = -2 \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2} \frac{\sum_A \left( \frac{EI}{L} \right)_b}{\sum_A \left( \frac{EI}{L} \right)_c} \theta_A \quad (2.255)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , obtenemos:

$$(M_B)_{c2} = -2 \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2} \frac{\sum_B \left( \frac{EI}{L} \right)_b}{\sum_B \left( \frac{EI}{L} \right)_c} \theta_B \quad (2.256)$$

Para simplificar introduciremos los llamados *factores de rigidez relativa* de los nudos:

$$G_A = \frac{\sum_A \left( \frac{EI}{L} \right)_c}{\sum_A \left( \frac{EI}{L} \right)_b} \quad (2.257)$$

$$G_B = \frac{\sum_B \left( \frac{EI}{L} \right)_c}{\sum_B \left( \frac{EI}{L} \right)_b} \quad (2.258)$$

Por lo que queda:

$$(M_A)_{c2} = - \frac{2 \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2}}{G_A} \theta_A = -R_{kA} \theta_A \quad (2.259)$$

$$(M_B)_{c2} = - \frac{2 \left( \frac{EI}{L} \right)_{c2}}{G_B} \theta_B = -R_{kB} \theta_B \quad (2.260)$$

Es decir, las constantes elásticas o rigideces,  $R_k$ , de los resortes modelizados en los nudos  $A$  y  $B$ , se pueden expresar en función de las rigideces a flexión de las vigas y columnas concurrentes en dichos nudos, de tal manera que:

$$R_{kA} = \frac{2 \left( \frac{EI}{L} \right) c_2}{G_A} \quad (2.261)$$

$$R_{kB} = \frac{2 \left( \frac{EI}{L} \right) c_2}{G_B} \quad (2.262)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (2.243) y (2.259) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (2.244) y (2.260) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[ s_{ii} + \frac{2}{G_A} \right] \theta_A + s_{ij} \theta_B = 0 \quad (2.263)$$

$$s_{ji} \theta_A + \left[ s_{jj} + \frac{2}{G_B} \right] \theta_B = 0 \quad (2.264)$$

Las cuales podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s_{ii} + \frac{2}{G_A} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} + \frac{2}{G_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.265)$$

Y en el momento de producirse el pandeo debemos obtener una solución del sistema distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{ii} + \frac{2}{G_A} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} + \frac{2}{G_B} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.266)$$

Es decir:

$$\left( s_{ii} + \frac{2}{G_A} \right) \cdot \left( s_{jj} + \frac{2}{G_B} \right) - s_{ij} \cdot s_{ji} = 0 \quad (2.267)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.268)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.269)$$

La ecuación de equilibrio queda:

$$\frac{G_A G_B}{4} (kL)^2 + \left( \frac{G_A + G_B}{2} \right) \left( 1 - \frac{kL}{\tan kL} \right) + \frac{2 \tan \frac{kL}{2}}{kL} - 1 = 0 \quad (2.270)$$

Es imposible despejar  $k$  de esta ecuación de manera exacta, por lo que se puede recurrir a la resolución numérica o gráfica. No obstante, a través de desarrollos en serie se puede llegar a obtener la siguiente solución aproximada:

$$k \simeq \frac{\pi}{L} \left[ \frac{1,28 + 2(G_A + G_B) + 3G_A G_B}{0,64 + 1,4(G_A + G_B) + 3G_A G_B} \right] \quad (2.271)$$

Y recurriendo a la relación:

$$k^2 = \frac{P_p}{EI} \quad (2.272)$$

Podemos despejar la carga de pandeo para la columna en estudio ( $c2$ ):

$$P_p = k^2 EI = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left[ \frac{1,28 + 2(G_A + G_B) + 3G_A G_B}{0,64 + 1,4(G_A + G_B) + 3G_A G_B} \right]^2 EI \quad (2.273)$$

Reordenando términos tenemos:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{\left[ \frac{0,64 + 1,4(G_A + G_B) + 3G_A G_B}{1,28 + 2(G_A + G_B) + 3G_A G_B} \right]^2 L^2} \quad (2.274)$$

De esta expresión podemos identificar fácilmente el coeficiente de esbeltez,  $\beta$ :

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{\beta^2 L^2} \quad (2.275)$$

$$\beta = \frac{0,64 + 1,4(G_A + G_B) + 3G_A G_B}{1,28 + 2(G_A + G_B) + 3G_A G_B} \quad (2.276)$$

Por tanto, hemos podido observar como al igual que obteníamos la carga de pandeo,  $P_p$ , y el respectivo coeficiente de esbeltez,  $\beta$ , para los diferentes casos de Euler, igualmente se pueden hallar para una columna unida a otras barras de una red estructural. La diferencia existente es que en los casos estudiados por Euler, las condiciones de sustentación en los extremos están completamente definidas en una de las tres categorías: articulación, empotramiento o extremo libre. Y sin embargo, en el caso de una columna conectada

a otras barras, las condiciones de sustentación en sus extremos no están definidas a priori, sino que dependen de las características de las barras que concurren en dichos extremos. En este caso, al tratarse de una estructura intraslacional, no hay posibilidad de desplazamiento lateral de los extremos, por lo que el nudo tendrá unas propiedades intermedias entre “articulación” y “empotramiento”.

Una estimación del porcentaje de “articulación” o “empotramiento” que corresponde a un nudo, es posible a través de las relaciones de rigidez de las vigas y columnas que concurren en dicho nudo, es decir,  $G_A$  y  $G_B$ . Como hemos comprobado en la ecuación (2.274), las características del nudo se reflejan en la fórmula de la carga de pandeo mediante el coeficiente  $\beta$ , el cual depende de  $G_A$  y  $G_B$ . Además se puede decir que dicha expresión de  $\beta$  representa una fórmula general que engloba múltiples casos posibles, incluidos algunos de Euler, como podemos comprobar a continuación:

Como en la estructura hemos eliminado la posibilidad de desplazamiento lateral de los nudos, tendremos los siguientes casos extremos:

- $G \rightarrow \infty$ , que corresponde a un nudo perfectamente articulado.
- $G \rightarrow 0$ , que corresponde a un nudo perfectamente empotrado.

Según esto, podemos reproducir los siguientes casos de Euler:

- *Barra biarticulada*:  $G_A = G_B \rightarrow \infty$ , y sustituyendo en la ecuación (2.276), tenemos  $\beta = 1$ .
- *Barra biempotrada*:  $G_A = G_B \rightarrow 0$ , obteniéndose  $\beta = 0,5$ .
- *Barra empotrada-articulada*:  $G_A \rightarrow \infty$ , y  $G_B \rightarrow 0$ , obteniéndose  $\beta = 0,7$ .

En el siguiente apartado en el que se estudia la estructura traslacional, sí que están permitidos los desplazamientos laterales de los nudos, y por tanto podremos reproducir los casos de Euler que contemplan el “extremo libre”.

## B) Red estructural traslacional

Estudiaremos ahora cómo pandea una columna perteneciente a una red estructural similar a la del apartado A), pero existiendo en este caso la posibilidad de desplazamiento lateral de los nudos, es decir, la estructura es traslacional, como se puede ver en la Figura 2.19. También se puede demostrar que en este caso las barras pandearán en doble curvatura.

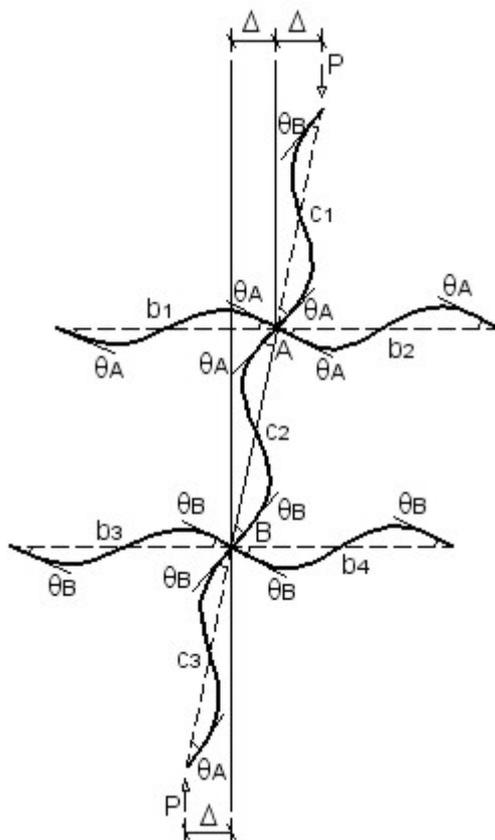


Figura 2.19: Red estructural traslacional

El procedimiento de análisis es similar al que usamos para la estructura intraslacional, pero en esta ocasión usaremos las ecuaciones pendiente-desplazamiento modificadas, las cuales tienen en cuenta el desplazamiento lateral,  $\Delta$ , que se produce entre los nudos. Si aplicamos dichas ecuaciones a los nudos A y B, que delimitan la columna  $c2$ , tenemos que:

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \quad (2.277)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (2.278)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} \left[ s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (2.279)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} \left[ s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L_{c3}} \right] \quad (2.280)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4\theta_A + 2\theta_A) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} 6\theta_A \quad (2.281)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4\theta_A + 2\theta_A) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} 6\theta_A \quad (2.282)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4\theta_B + 2\theta_B) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} 6\theta_B \quad (2.283)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4\theta_B + 2\theta_B) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} 6\theta_B \quad (2.284)$$

Y la condición de equilibrio para el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (2.285)$$

De donde:

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (2.286)$$

Y sustituyendo en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros:

$$\begin{aligned} (M_A)_{c2} = & -\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} 6\theta_A - \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} 6\theta_A - \\ & -\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \end{aligned} \quad (2.287)$$

Por otra parte, de la ecuación (2.278) tenemos que:

$$s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c2}} = \frac{(M_A)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}} \quad (2.288)$$

Suponiendo que  $L_{c1} \approx L_{c2}$ , podemos sustituir (2.288) en (2.287), y reagrupando queda:

$$(M_A)_{c2} = -6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} \frac{\sum_A \left(\frac{EI}{L}\right)_b \theta_A}{\sum_A \left(\frac{EI}{L}\right)_c} \quad (2.289)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , se obtiene:

$$(M_B)_{c2} = -6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} \frac{\sum_B \left(\frac{EI}{L}\right)_b \theta_B}{\sum_B \left(\frac{EI}{L}\right)_c} \quad (2.290)$$

Para simplificar introducimos los parámetros  $G_A$  y  $G_B$ , los cuales ya utilizamos en el apartado A) en (2.257) y (2.258). Por lo que las ecuaciones anteriores quedan:

$$(M_A)_{c2} = -\frac{6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{G_A} \theta_A = -R_{kA} \theta_A \quad (2.291)$$

$$(M_B)_{c2} = -\frac{6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{G_B} \theta_B = -R_{kB} \theta_B \quad (2.292)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (2.278) y (2.291) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (2.279) y (2.292) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[s_{ii} + \frac{6}{G_A}\right] \theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (2.293)$$

$$s_{ji}\theta_A + \left[s_{jj} + \frac{6}{G_B}\right] \theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (2.294)$$

Aquí tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas ( $\theta_A$ ,  $\theta_B$  y  $\Delta/L_{c2}$ ), por lo que necesitamos una ecuación más. Dicha ecuación puede ser obtenida planteando el equilibrio estático de la barra  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} + (M_B)_{c2} + P\Delta = 0 \quad (2.295)$$

Podemos ahora sustituir las expresiones (2.291) y (2.292) en esta última ecuación:

$$-\frac{6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{G_A} \theta_A - \frac{6 \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{G_B} \theta_B + P\Delta = 0 \quad (2.296)$$

Y por otra parte, podemos modificar el término en función de  $P$  de manera más conveniente en función de  $k$ :

$$k^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow P = k^2 EI \quad (2.297)$$

Por lo que tendríamos:

$$P\Delta = k^2 EI\Delta \quad (2.298)$$

Pero nos interesa que aparezca en la ecuación la variable  $\Delta/L_{c2}$ , por lo que podemos hacer lo siguiente:

$$P\Delta = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} (kL)_{c2}^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} \quad (2.299)$$

Finalmente la ecuación de equilibrio (2.295) queda:

$$-\frac{6\left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}\theta_A}{G_A} - \frac{6\left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}\theta_B}{G_B} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} (kL)_{c2}^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (2.300)$$

Y eliminando el factor común:

$$-\frac{6}{G_A}\theta_A - \frac{6}{G_B}\theta_B + (kL)_{c2}^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (2.301)$$

Por tanto, recopilando las tres ecuaciones de equilibrio (2.293), (2.294) y (2.301), y escribiéndolas en forma matricial, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} s_{ii} + \frac{2}{G_A} & s_{ij} & -(s_{ii} + s_{ij}) \\ s_{ji} & s_{jj} + \frac{2}{G_B} & -(s_{ji} + s_{jj}) \\ -\frac{6}{G_A} & -\frac{6}{G_B} & (kL)_{c2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \frac{\Delta}{L_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.302)$$

En el momento de producirse el pandeo, debemos obtener una solución del sistema distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{ii} + \frac{2}{G_A} & s_{ij} & -(s_{ii} + s_{ij}) \\ s_{ji} & s_{jj} + \frac{2}{G_B} & -(s_{ji} + s_{jj}) \\ -\frac{6}{G_A} & -\frac{6}{G_B} & (kL)_{c2}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.303)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.304)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.305)$$

La ecuación de equilibrio queda:

$$\frac{G_A G_B (kL)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{kL}{\tan kL} = 0 \quad (2.306)$$

De nuevo nos encontramos con una ecuación de la que despejar  $k$  es complicado. No obstante, desarrollando en serie la tangente podemos llegar a una solución analítica aproximada:

$$k \simeq \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{7,5 + (G_A + G_B)}{7,5 + 4(G_A + G_B) + 1,6G_A G_B}} \quad (2.307)$$

Por otro lado, recurriendo a la relación:

$$k^2 = \frac{P_p}{EI} \quad (2.308)$$

Podemos despejar la carga de pandeo para la columna en estudio ( $c2$ ):

$$P_p = k^2 EI = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[ \sqrt{\frac{7,5 + (G_A + G_B)}{7,5 + 4(G_A + G_B) + 1,6G_A G_B}} \right]^2 EI \quad (2.309)$$

Reordenando términos:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{\left[ \sqrt{\frac{7,5 + 4(G_A + G_B) + 1,6G_A G_B}{7,5 + (G_A + G_B)}} \right]^2 L^2} \quad (2.310)$$

Y de aquí podemos identificar de nuevo el coeficiente de esbeltez,  $\beta$ :

$$P_p = \frac{\pi^2 EI}{\beta^2 L^2} \quad (2.311)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{7,5 + 4(G_A + G_B) + 1,6G_A G_B}{7,5 + (G_A + G_B)}} \quad (2.312)$$

En este caso, al tratarse de una estructura traslacional, existe posibilidad de desplazamiento lateral de los nudos, por lo que los extremos de la barra analizada serán nudos con unas características intermedias entre “extremo libre” y “empotramiento con movilidad lateral”.

De nuevo, el porcentaje de cada tipo de enlace que caracteriza al nudo se podrá estimar en función de los parámetros  $G_A$  y  $G_B$ , los cuales aparecen intrínsecos dentro del coeficiente  $\beta$ .

En esta ocasión también podemos obtener algunos valores de  $\beta$  referentes a los casos de Euler. Para ello analizamos los siguientes casos extremos:

- $G \rightarrow \infty$ , que corresponde a un nudo libre.
- $G \rightarrow 0$ , que corresponde a un nudo empotrado con movilidad lateral.

Según esto podemos reproducir los siguientes casos de Euler:

- *Barra biempotrada con desplazamiento relativo de los extremos:*  $G_A = G_B \rightarrow 0$ , y sustituyendo en la ecuación (2.312), tenemos  $\beta = 1$ .
- *Barra empotrada-libre:*  $G_A \rightarrow \infty$ , y  $G_B \rightarrow 0$ , obteniéndose  $\beta = 2$ .

### Casos de carga lateral actuante

Finalmente cabe decir que tanto en el apartado A) como en el B), hemos analizado barras cargadas axialmente en los extremos. Pero podríamos extrapolar la metodología para incluir cargas laterales en el análisis. Para ello bastaría con hallar los momentos extremos generados por las cargas laterales,  $M_c$ , y luego sumarlos algebraicamente a los momentos producidos por la carga axial,  $M$ , de tal manera que:

$$M_A = R_{kA}\theta_A \pm M_{A,c} \quad (2.313)$$

$$M_B = R_{kB}\theta_B \pm M_{B,c} \quad (2.314)$$

Y si aplicamos esto a los casos estudiados en los apartados A y B, tenemos:

#### *Estructura intraslacional*

Columnas:

$$M_A = \frac{EI}{L}(s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \pm M_{A,c} \quad (2.315)$$

$$M_B = \frac{EI}{L}(s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B) \pm M_{B,c} \quad (2.316)$$

Vigas:

$$M_A = \frac{EI}{L} 2\theta_A \pm M_{A,c} \quad (2.317)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} 2\theta_B \pm M_{B,c} \quad (2.318)$$

*Estructura traslacional*

Columnas:

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L} \right] \pm M_{A,c} \quad (2.319)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[ s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L} \right] \pm M_{B,c} \quad (2.320)$$

Vigas:

$$M_A = \frac{EI}{L} 6\theta_A \pm M_{A,c} \quad (2.321)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} 6\theta_B \pm M_{B,c} \quad (2.322)$$

### 2.1.1.8. Análisis general de columnas por el método matricial de rigidez. Matriz de rigidez geométrica

En la sección anterior hemos modelizado una columna perteneciente a una red estructural considerando que los nudos de la barra, donde esta se conecta a otras barras, se comportan como resortes elásticos más o menos rígidos dependiendo de las rigideces relativas de las barras que concurren en el nudo.

En esta sección vamos a abordar de nuevo el problema de la columna inmersa en una red estructural, pero esta vez aplicando el *método matricial de rigidez*, usado comúnmente para el análisis de primer orden de estructuras hiperestáticas. Y se incorporarán a dicho método las condiciones de estabilidad derivadas de los efectos de segundo orden producidos por la carga axial.

El método de rigidez relaciona los distintos tipos de solicitaciones que actúan en los extremos de la barra (axial,  $P$ , momentos flectores,  $M$ , y cortante,  $T$ ) con los desplazamientos que producen dichas solicitaciones (lineal,  $u$ , giro,  $\theta$ , y lateral,  $v$ ). En la Figura 2.20 se puede ver un esquema de análisis en el que se muestra el convenio de signos positivos a emplear.

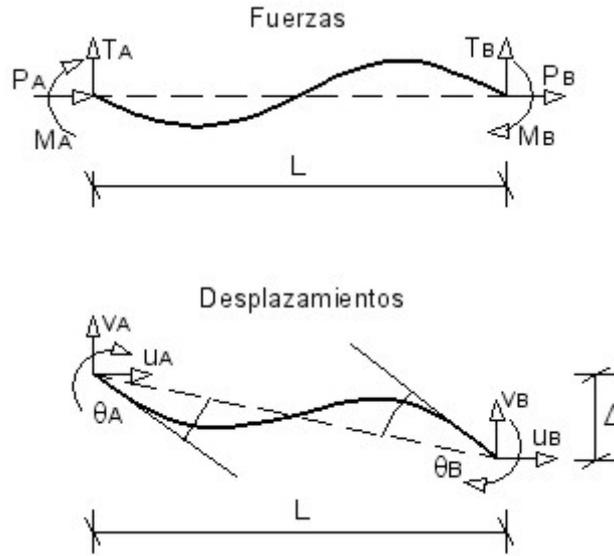


Figura 2.20: Esquema de análisis de rigidez y convenio de signos

La ecuación que relaciona los axiales,  $P$ , con los desplazamientos lineales,  $u$ , se deduce de la ley de Hooke:

$$P_A = \frac{EA}{L} \Delta L = \frac{EI}{L} \frac{A}{I} \Delta L \quad (2.323)$$

$$\Delta L = u_A - u_B \quad (2.324)$$

Y para que haya compresión, los axiales en los extremos deben tener sentidos opuestos:

$$P_B = -P_A = -\frac{EI}{L} \frac{A}{I} \Delta L \quad (2.325)$$

Por otra parte tenemos que la relación entre los momentos flectores extremos,  $M$ , y los giros,  $\theta$ , viene expresada por las ecuaciones pendiente-desplazamiento ya estudiadas anteriormente. Estas ecuaciones son similares a las ecuaciones “momento-giro” que surgen del análisis de primer orden, pero incorporan los efectos amplificadores de segundo orden derivados de la presencia de la carga axial:

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[ s_{ii} \theta_A + s_{ij} \theta_B - (s_{ii} + s_{ij}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (2.326)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[ s_{ji} \theta_A + s_{jj} \theta_B - (s_{ji} + s_{jj}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (2.327)$$

$$\Delta = v_A - v_B \quad (2.328)$$

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.329)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.330)$$

Finalmente, la relación entre los cortantes extremos,  $T$ , y los desplazamientos laterales,  $v$ , surge del establecimiento del par de fuerzas necesario para equilibrar los flectores en los extremos:

$$T_A = -\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{P\Delta}{L} \quad (2.331)$$

Pero como:

$$P = k^2 EI \quad (2.332)$$

Tenemos que:

$$T_A = -\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{EI k^2 \Delta}{L} \quad (2.333)$$

$$T_B = \frac{M_A + M_B}{L} - \frac{EI k^2 \Delta}{L} \quad (2.334)$$

Si escribimos las seis ecuaciones del sistema en forma matricial:

$$\{f\} = [K^*]\{d\} \quad (2.335)$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} P_A \\ T_A \\ M_A \\ P_B \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} \quad \{d\} = \begin{bmatrix} u_A \\ u_A \\ \theta_A \\ u_B \\ u_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (2.336)$$

$$[K^*] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(s_{ii}+s_{ij})-(kL)^2}{L^2} & -\frac{s_{ii}+s_{ij}}{L} & 0 & \frac{-2(s_{ii}+s_{ij})+(kL)^2}{L^2} & -\frac{s_{ii}+s_{ij}}{L} \\ 0 & -\frac{s_{ii}+s_{ij}}{L} & s_{ii} & 0 & \frac{s_{ii}+s_{ij}}{L} & s_{ij} \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2(s_{ji}+s_{jj})+(kL)^2}{L^2} & \frac{s_{ji}+s_{jj}}{L} & 0 & \frac{2(s_{ji}+s_{jj})-(kL)^2}{L^2} & \frac{s_{ji}+s_{jj}}{L} \\ 0 & -\frac{s_{ji}+s_{jj}}{L} & s_{ji} & 0 & \frac{s_{ji}+s_{jj}}{L} & s_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.337)$$

Como se puede observar,  $[K^*]$  es la *matriz de rigidez* de la barra, pero incluyendo además los efectos de segundo orden. Esta matriz además es simétrica, por lo que a partir de ahora simplificaremos su escritura a la mitad superior de la misma.

Si sustituímos las funciones de estabilidad por sus correspondientes valores:

$$s_{ii} = s_{jj} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.338)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (2.339)$$

El sistema queda:

$$\begin{bmatrix} P_A \\ T_A \\ M_A \\ P_B \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2} \phi_1 & -\frac{6}{L} \phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2} \phi_1 & -\frac{6}{L} \phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & \frac{6}{L} \phi_2 & 2\phi_4 \\ S & I & M & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{L^2} \phi_1 & \frac{6}{L} \phi_2 \\ & & & & & 4\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_A \\ \theta_A \\ u_B \\ u_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (2.340)$$

Donde:

$$\phi_1 = \frac{(kL)^2 \sin kL}{12(2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)} \quad (2.341)$$

$$\phi_2 = \frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{6(2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)} \quad (2.342)$$

$$\phi_3 = \frac{kL(\sin kL - kL \cos kL)}{4(2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)} \quad (2.343)$$

$$\phi_4 = \frac{kL(kL - \sin kL)}{2(2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)} \quad (2.344)$$

En el caso de no existir carga axial, estas funciones valen la unidad:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \phi_1 = \lim_{k \rightarrow 0} \phi_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \phi_3 = \lim_{k \rightarrow 0} \phi_4 = 1 \quad (2.345)$$

Por lo que la matriz de rigidez  $[K^*]$  toma la forma de la matriz de rigidez  $[K_0]$ , que surge del análisis de primer orden de la barra, es decir, si no se tiene en cuenta la influencia de la carga axial:

$$[K_0] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & 4 & 0 & \frac{6}{L} & 2 \\ S & I & M & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad (2.346)$$

Volviendo al sistema general (2.340), podemos ver como la incógnita,  $k$ , está envuelta dentro de expresiones trigonométricas, por lo que resulta difícil trabajar con ella y despejarla finalmente del sistema.

En la bibliografía [8, 7], se puede ver como diversos autores solucionan este problema desarrollando en serie las entidades trigonométricas de las funciones de estabilidad, de tal forma que:

$$\phi_1 = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [-(kL)^2]^n}{12 \left[ \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [-(kL)^2]^n \right]} \quad (2.347)$$

$$\phi_2 = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} [-(kL)^2]^n}{6 \left[ \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [-(kL)^2]^n \right]} \quad (2.348)$$

$$\phi_3 = \frac{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} [-(kL)^2]^n}{4 \left[ \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [-(kL)^2]^n \right]} \quad (2.349)$$

$$\phi_4 = \frac{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} [-(kL)^2]^n}{2 \left[ \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [-(kL)^2]^n \right]} \quad (2.350)$$

Las expresiones obtenidas corresponden a series convergentes, pero su suma no puede aproximarse a ninguna expresión sencilla y manejable. Por tanto, se opta por truncar la serie y tomar sólo los dos primeros términos a costa de perder algo de precisión en la solución. Según esto, y tomando  $k^2 = P/EI$ , la matriz  $[K^*]$ , puede expresarse como suma de dos matrices:

$$[K^*] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & & 4 & 0 & \frac{6}{L} & 2 \\ S & I & M & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} -$$

$$-P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ & & \frac{2L}{15} & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ S & I & M & & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (2.351)$$

O simbólicamente:

$$[K^*] = [K_0] - P[K_g] \quad (2.352)$$

Donde  $[K_0]$ , es la *matriz de rigidez de primer orden*, y  $[K_g]$ , es la *matriz de rigidez geométrica*, la cual incluye los efectos de segundo orden generados por la carga axial,  $P$ , en la matriz de rigidez completa,  $[K^*]$ .

Se puede observar como la matriz geométrica va restando a la matriz de primer orden, lo cual supone que una barra sometida a una carga axial de compresión, tiene una rigidez,  $[K^*]$ , menor que la de una barra en las mismas condiciones y no comprimida, cuya rigidez viene determinada por  $[K_0]$ .

Tenemos entonces que el sistema de ecuaciones que define el equilibrio de la barra es:

$$\{f\} = [[K_0] - P[K_g]]\{d\} \quad (2.353)$$

Por tanto, ya tenemos el sistema que rige el comportamiento a pandeo de una barra genérica conectada a una red estructural.

El siguiente paso sería particularizar este sistema genérico para las diferentes barras de una estructura concreta. Así pues, en una estructura existirían barras que no soportarían axial, otras en las que no habría flectores, etc. De esta manera, a cada barra de la estructura le correspondería un sistema con una matriz de rigidez asociada, la cual sería sólo un caso particular de la matriz de rigidez,  $[K^*]$ , analizada anteriormente.

A continuación deberíamos ensamblar las matrices de rigidez de cada una de las barras, obteniendo así la matriz de rigidez de la estructura completa,  $[K_T^*]$ . Según esto, el sistema de ecuaciones de la estructura completa sería:

$$\{F\} = [K_T^*]\{D\} = [[K_{0,T}] - P[K_{g,T}]]\{D\} \quad (2.354)$$

Para obtener la carga de pandeo, simplemente tenemos que aplicar la condición de equilibrio en el momento de la bifurcación, la cual implica que el determinante de la matriz de rigidez debe ser nulo:

$$\det[K_T^*] = 0 \Rightarrow \det[[K_{0,T}] - P[K_{g,T}]] = 0 \quad (2.355)$$

Como podemos ver en esta ecuación, la obtención del valor de  $P$  necesario para producirse el pandeo, es matemáticamente un problema de autovalores. Cada *autovalor* obtenido corresponde a una *carga de pandeo*, y sus respectivos *autovectores* corresponden a los diferentes *modos de pandeo*.

De la resolución del determinante surge la *ecuación característica de la estructura*, polinomio cuyas raíces serán los diferentes autovalores buscados. Sólo el menor de esos autovalores será el que nos de la *carga de pandeo de la estructura*,  $P_{p,T}$ , que será la carga a la que se producirá el pandeo en la barra más desfavorecida de la estructura.

Cabe decir que el método de la matriz de rigidez sólo es válido para analizar el pandeo en una estructura completa, ya que para una única barra aislada, la resolución del sistema de ecuaciones conduce a una solución trivial en la que el determinante de la matriz de rigidez se anula para cualquier valor de  $P$ .

## 2.1.2. La columna real

### 2.1.2.1. Definición de columna real

Hasta ahora hemos analizado la *columna ideal*, la cual como vimos anteriormente tenía ciertas características:

- La carga axial a la que está sometida es centrada, es decir, no existe excentricidad de la carga respecto de la directriz de la barra.
- La barra es perfectamente recta, sin ninguna curvatura inicial por imperfecciones de fabricación.
- El material de la barra es isótropo y homogéneo.
- No existen tensiones residuales en la barra debidas a su fabricación.

Pues bien, en realidad estos requisitos son imposibles de cumplir por los elementos estructurales empleados en construcción, por perfecto que sea su proceso de fabricación y puesta en obra. Esto nos lleva a tener que dar un paso más, y estudiar el fenómeno de pandeo por flexión en *columnas reales* o imperfectas. Dichas columnas o barras reales tienen las siguientes peculiaridades:

- La carga axial no actúa de manera centrada, sino con una pequeña excentricidad.
- La barra tiene una pequeña deformación inicial, debida a imperfecciones en el proceso de fabricación.
- El material no es perfectamente isótropo ni homogéneo.
- Pueden existir tensiones residuales procedentes del proceso de fabricación.

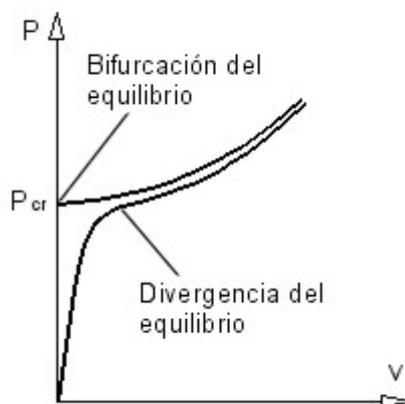
De estas cuatro características, las dos últimas son difícilmente evaluables, por lo que se suelen englobar en los coeficientes de mayoración. Sin embargo, la excentricidad y la deformación inicial, como veremos más adelante, sí pueden ser factores a tener en cuenta para el análisis de la columna real.

### 2.1.2.2. Teoría de la divergencia del equilibrio

Cuando analizábamos la *columna ideal*, veíamos como su estudio se basaba en la *teoría de la bifurcación del equilibrio*, la cual suponía que cuando la carga axial de compresión,  $P$ , va aumentando, la barra sólo sufre deformaciones lineales (equilibrio estable), hasta que  $P$  alcanza el valor de la *carga de pandeo*,  $P_p$ , momento en el cual existe un equilibrio neutro, y a partir del cual, si la carga sigue aumentando, se alcanzará el estado de deformaciones no lineales (equilibrio inestable), con la consecuente rotura de la barra.

Sin embargo, al analizar la *columna real*, la situación es algo diferente. En este caso, es de aplicación la *teoría de la divergencia del equilibrio*. Aquí debemos tener en cuenta que al ser la columna *real*, esta parte con una curvatura inicial, y a su vez, la carga axial actúa con una pequeña excentricidad, factores que hacen que en el primer momento en que comienza a actuar la carga axial,  $P$ , comiencen a producirse deformaciones no lineales y momentos flectores. Esto supone que, en este caso, no tendremos un *punto de bifurcación del equilibrio* en el cual comiencen bruscamente las deformaciones no lineales, sino que ahora dichas deformaciones estarán ya presentes desde el principio, existiendo una *divergencia del equilibrio*, que desde que comienza a actuar la carga axial, lleva a la barra desde el equilibrio estable inicial a la situación de rotura, de manera suave y continuada, sin pasar por un punto de transición o de equilibrio neutro.

No obstante, a pesar de que existan deformaciones no lineales desde la aparición de la carga axial, habrá un momento a partir del cual la barra pase del equilibrio estable al inestable. Esto ocurrirá cuando la carga axial,  $P$ , alcance el valor de la *carga de pandeo*,  $P_p$ , que en el caso de la columna real,


 Figura 2.21: *Divergencia del equilibrio*

como se dijo anteriormente, suele recibir el nombre de *carga crítica*,  $P_{cr}$ , para distinguirla de su homóloga para la columna ideal.

En la Figura 2.21 se puede observar la gráfica carga-desplazamiento en el que se muestra la evolución del sistema.

### 2.1.2.3. Evaluación de la excentricidad de la carga axial. Fórmula de la secante

Vamos a analizar una columna de longitud  $L$ , inercia  $I$ , biarticulada, y sometida a una carga axial,  $P$ , descentrada en sus extremos. El caso a estudiar es similar al *primer caso de Euler*, pero con la particularidad de que la carga axial tiene una pequeña excentricidad,  $e$  (Figura 2.22).

Estudiando el diagrama de cuerpo libre, obtenemos los momentos interno y externo a la barra:

$$\text{Momento externo: } M_{ext}(x) = P \cdot (v(x) + e)$$

$$\text{Momento interno: } M_{int}(x) = -EI \cdot v''(x)$$

Igualando ambos momentos se llega a la siguiente condición de equilibrio:

$$EIv''(x) + P(v(x) + e) = 0 \quad (2.356)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.357)$$

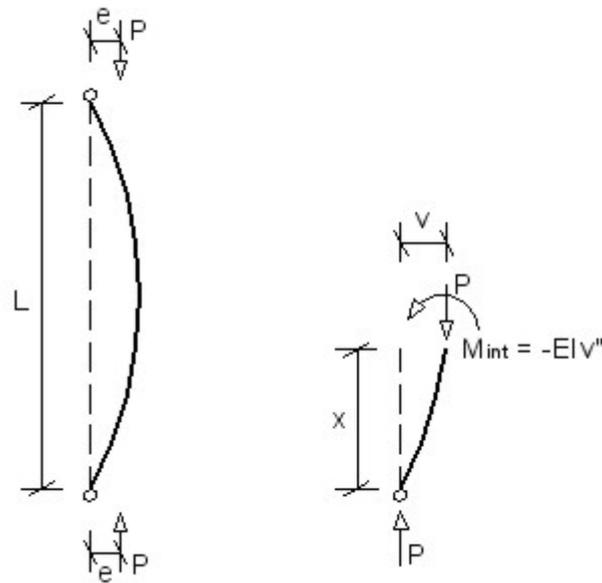


Figura 2.22: Barra biarticulada sometida a carga axial descentrada

Tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$v''(x) + k^2(v(x) + e) = 0 \quad (2.358)$$

Cuya solución general es:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx - e \quad (2.359)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = Ak \cos kx - B \sin kx \quad (2.360)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx \quad (2.361)$$

Para despejar las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(0) = 0 \quad (2.362)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.363)$$

$$v''(0) = 0 \quad (2.364)$$

$$v''(L) = 0 \quad (2.365)$$

Resultando:

$$A = \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} e \quad (2.366)$$

$$B = e \quad (2.367)$$

Con lo que la ecuación de la deformada queda finalmente:

$$v(x) = e \left[ \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx - 1 \right] \quad (2.368)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = e \left[ \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} k \cos kx - \sin kx \right] \quad (2.369)$$

$$v''(x) = -e \left[ \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} k^2 \sin kx + k^2 \cos kx \right] \quad (2.370)$$

Por otra parte, la ecuación de momentos flectores es:

$$M(x) = -EIv''(x) = EI \cdot e \left[ \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} k^2 \sin kx + k^2 \cos kx \right] \quad (2.371)$$

### **Cálculo de los coeficientes de amplificación de la flecha, $\Phi_f(x)$ y del momento, $\Phi_m(x)$**

Podemos realizar un estudio de las amplificaciones producidas. Para ello, recurrimos al análisis de primer orden de las deformaciones y momentos generados por el axial  $P$  antes de llegar a producirse el pandeo.

La ecuación de la deformada de primer orden es:

$$y(x) = \frac{P \cdot e}{2EI} (L - x)x \quad (2.372)$$

Y sus derivadas:

$$y'(x) = \frac{P \cdot e}{2EI} (L - 2x) \quad (2.373)$$

$$y''(x) = -\frac{P \cdot e}{EI} \quad (2.374)$$

Según esto, el *coeficiente de amplificación de la flecha* es:

$$\begin{aligned}\Phi_f(x) &= \frac{v(x)}{y(x)} = \frac{e \left[ \frac{1-\cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx - 1 \right]}{\frac{P \cdot e}{2EI} (L-x)x} = \\ &= \frac{\frac{1-\cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx - 1}{\frac{k^2}{2} (L-x)x} = \frac{2 \left[ \frac{1-\cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx - 1 \right]}{k^2 (L-x)x}\end{aligned}\quad (2.375)$$

Por otra parte, la ecuación del momento de primer orden es:

$$M_y(x) = -EIy''(x) = P \cdot e \quad (2.376)$$

Y por tanto, el *coeficiente de amplificación del momento* es:

$$\begin{aligned}\Phi_m(x) &= \frac{M(x)}{M_y(x)} = \frac{EI \cdot e \left[ \frac{1-\cos kL}{\sin kL} k^2 \sin kx + k^2 \cos kx \right]}{P \cdot e} = \\ &= \frac{\left[ \frac{1-\cos kL}{\sin kL} k^2 \sin kx + k^2 \cos kx \right]}{k^2} = \frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx\end{aligned}\quad (2.377)$$

### Cálculo de la flecha y momento máximos, $v_{\text{máx}}$ y $M_{\text{máx}}$

Por las condiciones de simetría, se puede ver fácilmente como es en  $x = L/2$  donde se producen los valores máximos para la flecha y el momento flector. Según esto tenemos:

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P \cdot e \cdot L^2}{8EI} = \frac{k^2 L^2 \cdot e}{8} \quad (2.378)$$

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \Phi_f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{16 \sec \frac{kL}{2} \sin^2 \frac{kL}{4}}{k^2 L^2} \quad (2.379)$$

$$v_{\text{máx}} = v\left(\frac{L}{2}\right) = \left[ \frac{16 \sec \frac{kL}{2} \sin^2 \frac{kL}{4}}{k^2 L^2} \right] \cdot \frac{k^2 L^2 \cdot e}{8} = 2e \cdot \sec \frac{kL}{2} \sin^2 \frac{kL}{4} \quad (2.380)$$

Si desarrollamos en serie la secante y el seno, y hacemos  $k = \pi/L \sqrt{P/P_p}$ , obtenemos la expresión simplificada del *coeficiente de amplificación de la flecha máxima*:

$$\Phi_{f,\text{máx}} \simeq \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.381)$$

De tal manera que podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{máx}} &= \Phi_{f,\text{máx}} \cdot y_{\text{máx}} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \frac{P \cdot e \cdot L^2}{8EI} = \\
 &= \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \frac{k^2 L^2 \cdot e}{8} = \left[ \frac{1,25 \left(\frac{P}{P_p}\right)}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] e \quad (2.382)
 \end{aligned}$$

Similarmente podemos hallar el momento máximo:

$$M_{y,\text{máx}} = P \cdot e \quad (2.383)$$

$$\Phi_{m,\text{máx}} = \Phi_m \left( \frac{L}{2} \right) = \sec \frac{kL}{2} \quad (2.384)$$

$$M_{\text{máx}} = M \left( \frac{L}{2} \right) = P \cdot e \cdot \sec \frac{kL}{2} \quad (2.385)$$

De nuevo, desarrollando en serie la secante, obtenemos una expresión simplificada del *coeficiente de amplificación del momento máximo*:

$$\Phi_{m,\text{máx}} \simeq \frac{1 + 0,2 \left(\frac{P}{P_p}\right)}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.386)$$

Y por tanto:

$$M_{\text{máx}} = \Phi_{m,\text{máx}} \cdot M_{y,\text{máx}} = \left[ \frac{1 + 0,2 \left(\frac{P}{P_p}\right)}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] P \cdot e \quad (2.387)$$

### Fórmula de la secante

Para llevar a la práctica los resultados obtenidos del análisis de la excentricidad de la carga axial, debemos traducir los resultados a términos de tensiones. Así pues, la tensión máxima generada por la carga axial  $P$ , y excentricidad  $e$ , será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} h_{\alpha,\text{máx}}}{I_{\alpha}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} h_{\alpha,\text{máx}}}{i_{\alpha}^2 A} =$$

$$= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{M_{\text{máx}} h_{\alpha, \text{máx}}}{P i_{\alpha}^2} \right] \quad (2.388)$$

Donde:

- $P$ , es la carga axial aplicada en los extremos.
- $A$ , es el área de la sección resistente de la barra.
- $M_{\text{máx}}$ , es el momento máximo que actúa sobre la barra.
- $h_{\alpha, \text{máx}}$ , es la distancia desde el eje de trabajo,  $\alpha$ , de la sección resistente hasta la arista exterior de dicha sección.
- $I_{\alpha}$ , es el momento de inercia de la sección resistente respecto del eje de trabajo,  $\alpha$ .
- $i_{\alpha}$ , es el radio de giro de la sección resistente respecto del eje de trabajo,  $\alpha$ .

Por otra parte, como vimos anteriormente, el momento máximo teórico sobre la barra es:

$$M_{\text{máx}} = P \cdot e \cdot \sec \frac{kL}{2} \quad (2.389)$$

O en su forma aproximada:

$$M_{\text{máx}} = \left[ \frac{1 + 0,2 \left( \frac{P}{P_p} \right)}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] P \cdot e \quad (2.390)$$

Sustituyendo  $M_{\text{máx}}$  en la ecuación (2.388), obtenemos la llamada *fórmula de la secante*:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{h_{\alpha, \text{máx}} \cdot P \cdot e \cdot \sec \frac{kL}{2}}{P i_{\alpha}^2} \right] = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot h_{\alpha, \text{máx}}}{i_{\alpha}^2} \sec \frac{kL}{2} \right] = \\ &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot h_{\alpha, \text{máx}}}{i_{\alpha}^2} \left[ \frac{1 + 0,2 \left( \frac{P}{P_p} \right)}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.391)$$

Esta ecuación nos permite hallar la carga axial  $P$ , que hace que se alcance el valor del límite elástico del material ( $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_e$ ), límite que nos marcará el diseño en el campo elástico.

**2.1.2.4. Evaluación de la deformación inicial. Fórmula de Perry-Robertson**

Ahora estudiaremos una columna de longitud  $L$ , inercia  $I$ , biarticulada y sometida a una carga axial,  $P$ , en sus extremos. Además, la barra parte inicialmente con una deformación o curvatura inicial.

En diversas referencias bibliográficas [2, 7, 8, 9], los autores proponen una ecuación para la curvatura inicial del siguiente tipo:

$$v_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{2.392}$$

Donde  $\delta_0$  es la amplitud o flecha máxima, situada en  $x = L/2$  por razones de simetría.

El problema a estudiar se muestra en la Figura 2.23. Los momentos actuantes son:

Momento externo:  $M_{ext}(x) = P \cdot (v(x) + v_0(x))$

Momento interno:  $M_{int}(x) = -EI \cdot v''(x)$

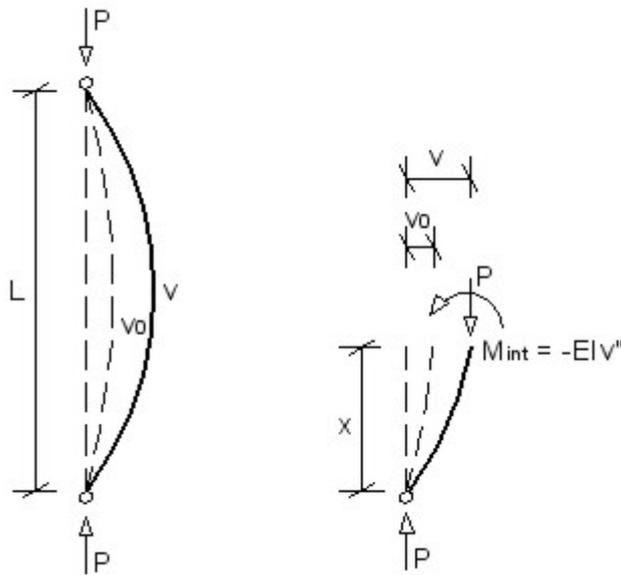


Figura 2.23: Barra biarticulada con curvatura inicial

Igualando momentos obtenemos la ecuación de equilibrio:

$$EIv''(x) + P(v(x) + v_0(x)) \quad (2.393)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.394)$$

Tenemos:

$$v''(x) + k^2(v(x) + v_0(x)) = 0 \quad (2.395)$$

$$v''(x) + k^2(v(x) + \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}) = 0 \quad (2.396)$$

Ecuación diferencial cuya solución general es:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + \frac{\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} \quad (2.397)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx + \frac{k^2 \pi L \delta_0 \cos \frac{\pi x}{L}}{\pi^2 - k^2 L^2} \quad (2.398)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx + \frac{k^2 \pi^2 \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{\pi^2 - k^2 L^2} \quad (2.399)$$

Aplicando las condiciones de contorno obtenemos las constantes  $A$  y  $B$ :

$$v(0) = 0 \quad (2.400)$$

$$v(L) = 0 \quad (2.401)$$

$$v''(0) = 0 \quad (2.402)$$

$$v''(L) = 0 \quad (2.403)$$

Resultando:

$$A = 0 \quad (2.404)$$

$$B = 0 \quad (2.405)$$

Por lo que la finalmente la deformada queda:

$$v(x) = \frac{\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} \quad (2.406)$$

Pero para obtener la deformada total, debemos sumarle la deformada inicial:

$$\begin{aligned} v_T(x) &= v(x) + v_0(x) = \frac{\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} + \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} = \\ &= \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} \right] \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{kL}{\pi}\right)^2} \right] \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \quad (2.407)$$

Haciendo el cambio  $k = \pi/L\sqrt{P/P_p}$ , se llega a:

$$v_T(x) = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.408)$$

Y sus derivadas son:

$$v'_T(x) = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (2.409)$$

$$v''_T(x) = \left[ \frac{-1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.410)$$

La ecuación de los momentos flectores será:

$$M_0(x) = -EIv''_0(x) = Pv_0(x) = P\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.411)$$

$$M_T(x) = -EIv''_T(x) = Pv_T(x) = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] P\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.412)$$

**Cálculo de los coeficientes de amplificación de la flecha,  $\Phi_f(x)$  y del momento,  $\Phi_m(x)$**

El coeficiente de amplificación de la flecha es:

$$\Phi_f(x) = \frac{v_T(x)}{v_0(x)} = \frac{v(x) + v_0(x)}{v_0(x)} = \frac{v(x)}{v_0(x)} + 1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} + 1 = \frac{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{kL}\right)^2 - 1} = \\
 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{kL}{\pi}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.413)
 \end{aligned}$$

Vemos que en esta ocasión este coeficiente es constante e independiente de  $x$ .

Y el *coeficiente de amplificación del momento* se halla de manera similar:

$$\begin{aligned}
 \Phi_m(x) &= \frac{M_T(x)}{M_0(x)} = \frac{M(x) + M_0(x)}{M_0(x)} = \frac{M(x)}{M_0(x)} + 1 = \frac{Pv(x)}{Pv_0(x)} + 1 = \\
 &= \frac{v(x)}{v_0(x)} + 1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{kL}{\pi}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.414)
 \end{aligned}$$

Que coincide justamente con el coeficiente de amplificación de la flecha.

Al ser ambos coeficientes independientes de la abcisa de la barra, los *coeficientes de amplificación máximos* también serán los mismos. Así pues, finalmente podemos concluir que:

$$\Phi_f = \Phi_{f,\text{máx}} = \Phi_m = \Phi_{m,\text{máx}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.415)$$

### Cálculo de la flecha y momento máximos, $v_{T,\text{máx}}$ y $M_{T,\text{máx}}$

En cuanto a la flecha tenemos:

$$v_{0,\text{máx}} = v_0 \left(\frac{L}{2}\right) = \delta_0 \quad (2.416)$$

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \Phi_f = \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \quad (2.417)$$

$$v_{T,\text{máx}} = v_T \left(\frac{L}{2}\right) = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 \quad (2.418)$$

Y respecto al momento:

$$M_{0,\text{máx}} = M_0 \left( \frac{L}{2} \right) = P\delta_0 \quad (2.419)$$

$$\Phi_{m,\text{máx}} = \Phi_m = \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \quad (2.420)$$

$$M_{T,\text{máx}} = M_T \left( \frac{L}{2} \right) = \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] P\delta_0 \quad (2.421)$$

### Fórmula de Perry-Robertson

De nuevo, para dar una aplicación práctica a los resultados obtenidos del análisis de la curvatura inicial, debemos pasar a términos de tensiones. Así pues, la tensión máxima generada en la barra es:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{P}{A} + \frac{M_{T,\text{máx}} h_{\alpha,\text{máx}}}{I_\alpha} = \frac{P}{A} + \frac{M_{T,\text{máx}} h_{\alpha,\text{máx}}}{i_\alpha^2 A} = \\ &= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{M_{T,\text{máx}} h_{\alpha,\text{máx}}}{P i_\alpha^2} \right] \end{aligned} \quad (2.422)$$

Donde:

- $P$ , es la carga axial aplicada en los extremos.
- $A$ , es el área de la sección resistente de la barra.
- $M_{T,\text{máx}}$ , es el momento total máximo que actúa sobre la barra.
- $h_{\alpha,\text{máx}}$ , es la distancia desde el eje de trabajo,  $\alpha$ , de la sección resistente hasta la arista exterior de dicha sección.
- $I_\alpha$ , es el momento de inercia de la sección resistente respecto del eje de trabajo,  $\alpha$ .
- $i_\alpha$ , es el radio de giro de la sección resistente respecto del eje de trabajo,  $\alpha$ .

Por otra parte, como vimos anteriormente, el momento máximo sobre la barra es:

$$M_{T,\text{máx}} = \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] P\delta_0 \quad (2.423)$$

Y sustituyendo  $M_{T,\text{máx}}$  en la ecuación (2.422), obtenemos la llamada *fórmula de Perry-Robertson*:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{\left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p} \right)} \right] P \delta_0 h_{\alpha,\text{máx}}}{P i_{\alpha}^2} \right] = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{\delta_0 h_{\alpha,\text{máx}}}{\left[ 1 - \left( \frac{P}{P_p} \right) \right] i_{\alpha}^2} \right] \quad (2.424)$$

Ecuación que junto a la fórmula de la secante, permitirá el diseño de columnas reales dentro del dominio elástico.

### 2.1.2.5. Método de Dutheil

Las fórmulas de la secante y de Perry-Robertson, aunque abordan el problema de la columna real, sólo lo hacen de manera parcial, por lo que no proporcionan una metodología completa para evaluar globalmente el pandeo por flexión en las barras reales. Esto hizo que más tarde el ingeniero francés Dutheil propusiera un método general para el estudio de la columna real, que aborda el problema por un procedimiento algo diferente al que hasta entonces otros autores venían utilizando. Esta metodología es además sugerida por la NBE, EA-95, actual normativa española sobre construcciones de acero.

Dutheil admitió que las imperfecciones referentes a la columna real se producían simultáneamente:

- La barra parte con una curvatura inicial del tipo:

$$v_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.425)$$

Esta es similar a la que tomaron Perry y Robertson.

- La carga axial a la que está sometida la columna tiene una pequeña excentricidad,  $e$ .
- El material no es isótropo ni homogéneo.
- Existen tensiones residuales procedentes del proceso de fabricación.

En la Figura 2.24, se muestra el esquema de un elemento diferencial de barra, del cual se parte para el análisis.

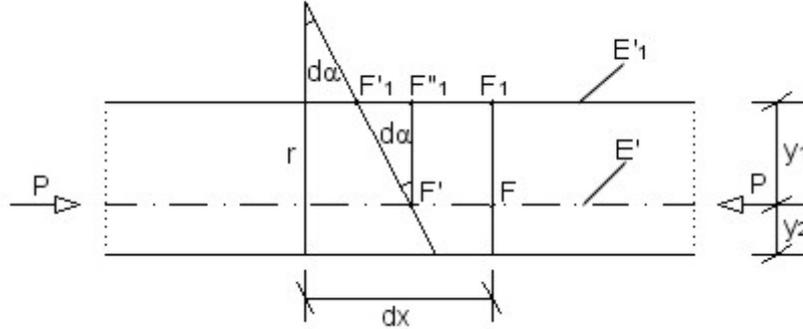


Figura 2.24: Esquema de análisis de Dutheil

Como vimos en el desarrollo de Perry-Robertson, la flecha máxima amplificada en la barra es:

$$v_{\text{máx}} = \Phi_{f,\text{máx}} \delta_0 = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 \quad (2.426)$$

También, aplicando la ecuación diferencial de la elástica, tenemos que el valor de la curvatura en la barra es:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.427)$$

Y por otra parte:

$$M_{\text{máx}} = P v_{\text{máx}} = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)} \right] \delta_0 P \quad (2.428)$$

De aquí tenemos que:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_{\text{máx}}}{EI} = \frac{P v_{\text{máx}}}{EI} = \frac{P \delta_0}{\left[1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)\right] EI} \quad (2.429)$$

Siendo  $r$  el radio de curvatura de la deformada en el punto donde se producen  $M_{\text{máx}}$  y  $v_{\text{máx}}$ .

En el momento de producirse el pandeo ( $P = P_{cr}$ ):

$$\frac{1}{r} = \frac{P_{cr} \delta_0}{EI} \quad (2.430)$$

Dutheil propone medir experimentalmente la curvatura producida en la barra en el momento del pandeo, así como la flecha inicial máxima,  $\delta_0$ . De esta manera podemos despejar la carga crítica,  $P_{cr}$ .

Tras llevar a cabo el experimento se comprobó que la carga crítica obtenida era inferior a la calculada en condiciones ideales (carga de pandeo o de Euler), lo cual era de esperar, ya que las características propias de las columnas reales hacen que los momentos y las deformaciones sean mayores y se produzca pandeo con un axial menor que en condiciones ideales.

Dutheil, en lugar de proponer una variante modificada de la fórmula de Euler que permitiera estimar la carga crítica, pensó en modificar el valor teórico del módulo de elasticidad del material, para que la ecuación (2.430) diera resultados acordes con la experimentación, dejando intacta la fórmula de Euler, es decir,  $P_{cr} = P_p = P_E$ . El proceso es el siguiente:

Supuso un *módulo de elasticidad reducido*, que además es dependiente del punto considerado dentro de la sección de la barra, ya que el material no es totalmente homogéneo en toda la sección. Concretamente, se supone que el módulo de elasticidad varía radialmente desde el centro de la sección hasta la periferia de la misma. Según esto tenemos:

$$E' = \frac{E}{1+b} \quad (2.431)$$

Que es el módulo de elasticidad reducido correspondiente al eje de aplicación de la carga axial, el cual no coincide con el eje central o directriz de la barra, debido a la pequeña excentricidad bajo la que actúa el axial.

$$E'_1 = \frac{E'}{1+a} \quad (2.432)$$

Es el módulo de elasticidad reducido correspondiente a la zona periférica de la sección de la barra.

Por otra parte, al ser los módulos elásticos diferentes dependiendo de la zona de la sección, las deformaciones unitarias también variarán. Según esto, en la Figura 2.24, se puede ver como:

$$FF' = \Delta(dx) = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E'} dx \quad (2.433)$$

$$DF' = dx - \frac{\sigma}{E'} dx = \left(1 - \frac{\sigma}{E'}\right) dx \equiv rd\alpha \quad (2.434)$$

Y de aquí podemos despejar la curvatura:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\sigma}{E'} \right) \quad (2.435)$$

Por otra parte:

$$F_1 F_1' = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E_1'} dx = \frac{\sigma}{\frac{E'}{1+a}} dx = \frac{\sigma(1+a)}{E'} dx \quad (2.436)$$

$$F_1' F_1'' = F_1 F_1' - F F' = \frac{\sigma(1+a)}{E'} dx - \frac{\sigma}{E'} dx = \frac{\sigma a}{E'} dx \equiv y_1 d\alpha \quad (2.437)$$

Y despejando la curvatura:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\sigma a}{E' y_1} \quad (2.438)$$

Igualando las expresiones (2.435) y (2.438) tenemos:

$$\frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\sigma}{E'} \right) = \frac{\sigma a}{E' y_1} \quad (2.439)$$

Por otra parte, el módulo de elasticidad es mucho mayor que la tensión de trabajo, por lo que:

$$\left( 1 - \frac{\sigma}{E'} \right) \simeq 1 \quad (2.440)$$

Y por tanto:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sigma a}{E' y_1} \quad (2.441)$$

Identificando la curvatura en la ecuación (2.430):

$$\frac{P_p \delta_0}{EI} = \frac{\sigma a}{E' y_1} = \frac{\sigma a}{\left( \frac{E}{1+b} \right) y_1} \quad (2.442)$$

Y despejando la flecha inicial máxima:

$$\delta_0 = \frac{aI(1+b)\sigma}{P_p y_1} \quad (2.443)$$

Ahora podemos desarrollar el coeficiente de amplificación modificado:

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{P}{P_p'} \right)} = \frac{P_p'}{P_p' - P} = \frac{\sigma_p'}{\sigma_p' - \sigma} \quad (2.444)$$

También:

$$P'_p = \frac{\pi^2 E' I}{L^2} = \frac{\pi^2 \left(\frac{E}{1+b}\right) I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(1+b)L^2} = \frac{P_p}{1+b} \quad (2.445)$$

$$\sigma'_p = \frac{P'_p}{A} = \frac{P_p}{A(1+b)} = \frac{\sigma_p}{1+b} \quad (2.446)$$

Y sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.444) queda:

$$\Phi_{f,\text{máx}} = \frac{\sigma_p/(1+b)}{\sigma_p/(1+b) - \sigma} = \frac{\sigma_p}{\sigma_p - (1+b)\sigma} \quad (2.447)$$

Volviendo a la ecuación (2.426) y sustituyendo en ella las expresiones (2.443) y (2.447) tenemos:

$$v_{\text{máx}} = \Phi_{f,\text{máx}} \delta_0 = \frac{\sigma_p}{\sigma_p - (1+b)\sigma} \cdot \frac{aI(1+b)\sigma}{P_p y_1} \quad (2.448)$$

Dutheil experimentó con perfiles de sección “doble L” para diferentes valores de las variables, y ajustó los parámetros  $a$  y  $b$  obteniendo los siguientes resultados:

$$b \simeq 0,3 \quad (2.449)$$

$$a(1+b) \simeq 0,3 \Rightarrow a \simeq 0,23 \quad (2.450)$$

Y sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$ , en la ecuación (2.448) queda:

$$v_{\text{máx}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_p - 1,3\sigma} \cdot \frac{0,3I\sigma}{P_p y_1} \quad (2.451)$$

De tal manera que ya podemos conocer el valor del momento máximo amplificado:

$$M_{\text{máx}} = P v_{\text{máx}} = \frac{P}{P_p} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_p - 1,3\sigma} \cdot \frac{0,3I\sigma}{y_1} \quad (2.452)$$

Conocido el momento máximo, todo se reduce a un problema de flexión compuesta. Según esto, la tensión total máxima a la que está sometida la barra es:

$$\begin{aligned} \sigma_T = \sigma + \sigma_F &= \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}} y_1}{I} = \sigma + \frac{P}{P_p} \cdot \frac{0,3\sigma\sigma_p}{\sigma_p - 1,3\sigma} = \\ &= \sigma + \frac{\sigma}{\sigma_p} \cdot \frac{0,3\sigma\sigma_p}{\sigma_p - 1,3\sigma} = \frac{\sigma(\sigma_p - \sigma)}{\sigma_p - 1,3\sigma} \end{aligned} \quad (2.453)$$

Además habrá un cierto valor crítico del axial,  $P_{cr}$ , que genere una tensión crítica,  $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ , tal que la tensión total  $\sigma_T$  sea igual al límite elástico del material, es decir:

$$\sigma_T = \sigma_e = \frac{\sigma_{cr}(\sigma_p - \sigma_{cr})}{\sigma_p - 1,3\sigma_{cr}} \quad (2.454)$$

De donde podemos despejar la tensión crítica:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2}(\sigma_p + 1,3\sigma_e) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_p + 1,3\sigma_e)^2 - \sigma_p\sigma_e} \quad (2.455)$$

Luego Dutheil definió el *coeficiente*  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} \quad (2.456)$$

Y estableció que la barra resistirá frente a pandeo si:

$$\frac{P^*}{A} \leq \sigma_{cr} \quad (2.457)$$

Siendo  $P^*$  la carga axial ponderada que actúa sobre la barra.

Si ponemos esta ecuación en función de  $\omega$ , tenemos:

$$\frac{P^*}{A} \leq \frac{\sigma_e}{\omega} \quad (2.458)$$

Y finalmente:

$$\frac{P^*\omega}{A} \leq \sigma_e \quad (2.459)$$

Por tanto, para comprobar una columna real a pandeo sólo tendremos que incrementar el axial actuante multiplicándolo por el coeficiente  $\omega$ , y luego comprobar que la tensión resultante sea menor que el límite elástico del material.

La estimación de  $\omega$  se aborda de la siguiente forma:

$$\omega = \frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} = \frac{\sigma_e}{\frac{1}{2}(\sigma_p + 1,3\sigma_e) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_p + 1,3\sigma_e)^2 - \sigma_p\sigma_e}} \quad (2.460)$$

Si multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador, también podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_p + 1,3\sigma_e) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_p + 1,3\sigma_e)^2 - \sigma_p\sigma_e}}{\sigma_p} \quad (2.461)$$

Y sabemos que:

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.462)$$

Por lo que queda:

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} + 1,3\sigma_e \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} + 1,3\sigma_e \right)^2 - \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \sigma_e}}{\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \quad (2.463)$$

Y de esta ecuación, la única variable desconocida es la esbeltez mecánica,  $\lambda$ , por lo que podemos decir que  $\omega$  es únicamente función de la esbeltez:

$$\omega = \omega(\lambda) \quad (2.464)$$

Concretamente para el acero A-42b, el más usado en estructuras resistentes, tenemos:

- $\sigma_e = 2600kp/cm^2$
- $E = 2,1 \cdot 10^6 kp/cm^2$

Resultando finalmente:

$$\omega = 0,5 + 8,15393 \cdot 10^{-5} \lambda^2 + \sqrt{(0,5 + 8,15393 \cdot 10^{-5} \lambda^2)^2 - 1,25445 \cdot 10^{-4} \lambda^2} \quad (2.465)$$

## 2.2. Columnas cortas y pandeo en el campo plástico

Como se comentó al comienzo del capítulo 2, cuando las barras no son muy *esbeltas*, sino más bien *cortas*, puede que cuando se alcance la carga de pandeo, el material se encuentre ya trabajando en el dominio inelástico.

Tradicionalmente las estructuras se diseñaban para que aguantaran cargas dentro del rango elástico, y por tanto si el pandeo pudiera producirse tras la plastificación del material, no era necesario tenerlo en cuenta, ya que la barra nunca llegaría a ese estado de tensiones. Sin embargo, los avances en teoría de

estructuras y resistencia de materiales han llevado a que hoy día se diseñen gran parte de las estructuras resistentes para trabajar en el campo plástico, debido a que se consigue un mejor aprovechamiento de las características resistentes del material, lo que conlleva un sustancial ahorro en las secciones empleadas.

Esto implica que si una barra va a trabajar en la zona plástica, el pandeo, si llega a producirse, lo hará también bajo esas condiciones de plasticidad, y por tanto será necesario analizar cómo se comporta la barra frente al fenómeno de pandeo cuando en vez de trabajar en el campo elástico, lo hace en el campo plástico.

A continuación se van a exponer dos teorías que abordan el problema del pandeo inelástico. Dichas teorías son únicamente un complemento o modificación de las teorías básicas existentes para el pandeo elástico, por lo que sólo se comentarán brevemente las diferencias fundamentales.

### 2.2.1. Teoría del módulo tangente

En 1889, el ingeniero alemán Engesser propuso la *teoría del módulo tangente* para describir el fenómeno de pandeo de barras comprimidas inelásticamente. Se asumieron las siguientes hipótesis de partida:

- La columna es ideal.
- Las secciones de la barra se mantienen planas también en el momento del pandeo, cuando la barra comienza a curvarse.
- Cuando la barra comienza a curvarse, no se produce inversión de deformaciones a lo largo de la sección resistente. Esto supone que las fibras de la zona traccionada no sufren deformación en el sentido de dicha tracción, es decir, toda la sección de la barra ya está plastificada.

El análisis comienza siendo similar al del primer caso de Euler. Tenemos una barra biarticulada de longitud  $L$ , e inercia  $I$ .

En el caso de pandeo elástico, hemos usado el *módulo de elasticidad*,  $E$ , del material, el cual es la constante de proporcionalidad entre la tensión aplicada y la deformación producida, tal como indica la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.466)$$

Donde  $E$ , representa la pendiente de una recta.

Sin embargo, cuando superamos el valor del límite elástico del material,  $\sigma_e$ , la tensión aplicada deja de relacionarse linealmente con la deformación producida, y la ecuación pasa de ser una recta a ser una determinada curva (Figura 2.25):

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (2.467)$$

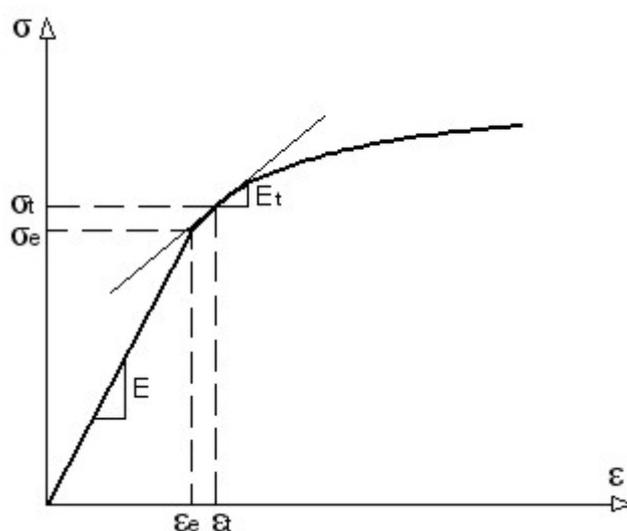


Figura 2.25: Teoría del módulo tangente

Por tanto, cuando se supera el valor del límite elástico del material, la pendiente de la curva ya deja de ser constante y de valor  $E$ , para pasar a ser una pendiente variable,  $E(\varepsilon)$ .

No obstante, observando la Figura 2.25, se puede ver que en el momento que se alcanza la carga de pandeo para la barra, nombrada en este caso como  $P_t$ , nos encontraremos en un punto,  $t$ , de la curva plástica con dos coordenadas concretas,  $\sigma_t$  y  $\varepsilon_t$ , que son respectivamente la tensión y la deformación en el momento del pandeo. En ese punto existirá una pendiente concreta,  $E(\varepsilon_t) = E_t$ , que será la pendiente de la recta tangente a la curva  $\sigma = f(\varepsilon)$  en el punto  $t$ . Por ello, Engesser llamó a dicha pendiente como *módulo tangente*,  $E_t$ . La carga de pandeo, al producirse en ese punto  $t$ , y con una pendiente igual al módulo tangente,  $E_t$ , fue llamada como *carga del módulo tangente*,  $P_t$ .

En base a estas consideraciones, desarrollando por el método estático el problema tal como lo hizo Euler para el pandeo elástico, se obtiene que la

carga de pandeo plástico o carga del módulo tangente de una barra aislada es:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{\beta^2 L^2} \quad (2.468)$$

Expresión similar a la obtenida por Euler,  $P_E$ , pero con la diferencia de que en vez de aparecer el módulo de elasticidad,  $E$ , aparece el módulo tangente,  $E_t$ . Así pues, podemos escribir:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{\beta^2 L^2} = \frac{E_t \pi^2 EI}{E \beta^2 L^2} = \frac{E_t}{E} P_E \quad (2.469)$$

### 2.2.2. Teoría del módulo doble

Esta teoría también fue propuesta por Engesser en 1895. Las hipótesis de partida son:

- La columna es ideal.
- Las secciones de la barra se mantienen planas también en el momento del pandeo, cuando la barra comienza a curvarse.
- Cuando la barra comienza a curvarse, se produce inversión de deformaciones a lo largo de la sección resistente, de tal manera que las fibras de la zona traccionada experimentan una deformación en el sentido de dicha tracción.

Esta última consideración supone que la zona traccionada de la sección de la barra debe tener aún propiedades elásticas, por lo que la sección se divide en dos zonas, una sometida a tracción y con módulo de elasticidad  $E$ , y otra sometida a compresión y con módulo tangente  $E_t$ .

Por tanto, en este caso necesitamos los dos módulos,  $E$  y  $E_t$ , para definir el comportamiento de la sección resistente de la barra. De aquí surge el nombre de *teoría del módulo doble* (Figura 2.26).

El *módulo doble*,  $E_d$ , será una combinación de los módulos  $E$  y  $E_t$ , tal que represente de manera ponderada las propiedades resistentes de la sección de la barra. Cada sección particular tendrá un módulo doble diferente, el cual será función de la geometría de la barra. Así pues, para una sección rectangular:

$$E_d = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (2.470)$$

Y para una sección en doble T:

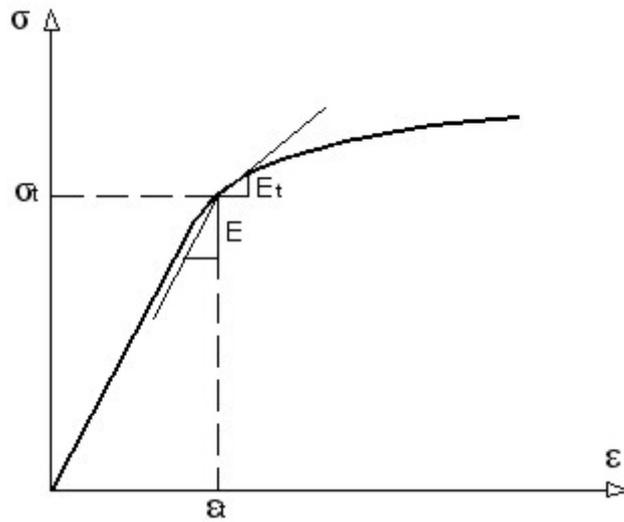


Figura 2.26: Teoría del módulo doble

$$E_d = \frac{2EE_t}{E + E_t} \quad (2.471)$$

Desarrollando el análisis estático de la barra se llega fácilmente a la carga de pandeo, en este caso llamada *carga del módulo doble*:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_d I}{\beta^2 L^2} = \frac{E_d \pi^2 EI}{E \beta^2 L^2} = \frac{E_d}{E} P_E \quad (2.472)$$

# Capítulo 3

## La barra aislada de inercia variable

En este capítulo se hará una revisión de los métodos y teorías propuestos en la bibliografía que tratan de analizar y modelizar el comportamiento de la *barra aislada de inercia variable* frente al fenómeno de pandeo. Como podremos ver, si bien en el caso de la barra de inercia constante hay gran cantidad de fuentes bibliográficas que tratan en profundidad el tema, en el caso de la barra de inercia variable, la información disponible es bastante escasa.

Como se comentó en el capítulo 2, sección 2.1.1.3, seguiremos nuestro estudio por la vía analítica, la cual representa el único camino que nos permitirá entender verdaderamente cómo se produce el pandeo en la barra de inercia variable.

### 3.1. Timoshenko

S. P. Timoshenko, en su libro *Theory of elastic stability* [30], analiza un caso particular para una barra de inercia variable, el cual vamos a mostrar en esta sección.

El primer paso para analizar el pandeo en una barra de inercia variable, es definir la geometría de dicha barra, y para ello es fundamental establecer una *ley de variación de inercia*. Este autor propuso una ley general muy versátil:

$$I(x) = I_a \left( \frac{x}{a} \right)^n \quad (3.1)$$

Donde  $x$ , representa la longitud de la barra,  $I_a$ , es el momento de inercia menor de la barra,  $a$ , es la longitud ficticia que resulta de prolongar las aristas

de la barra hasta su concurrencia (Figura 3.1), y  $n$ , es un exponente que varía dependiendo de la forma de la sección de la barra.

El exponente  $n = 2$ , representa bastante bien la mayoría de las secciones empleadas en la construcción, en especial las secciones rectangulares y las secciones en I o doble T, por lo que es el más usado por la mayoría de autores.

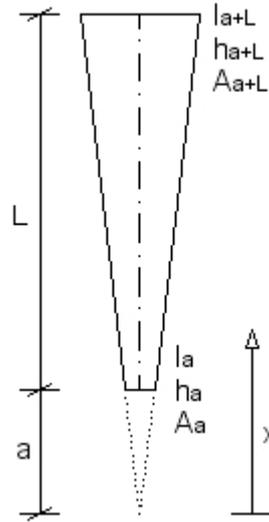


Figura 3.1: Barra de inercia variable

En la figura también se definen los cantos mínimo,  $h_a$ , y máximo,  $h_{a+L}$ . En base a estos parámetros, Timoshenko estableció el llamado *coeficiente de ahusamiento*,  $\gamma$ , de la barra:

$$\gamma = \frac{L}{a} = \frac{h_{a+L} - h_a}{h_a} \quad (3.2)$$

Según esto, podemos obtener una relación directa entre los momentos de inercia de los extremos de la barra:

$$I(a) = I_a \quad (3.3)$$

$$I(a + L) = I_a \left( \frac{a + L}{a} \right)^2 = I_a (1 + \gamma)^2 = I_{a+L} \quad (3.4)$$

$$\frac{I_{a+L}}{I_a} = \frac{I_a (1 + \gamma)^2}{I_a} = (1 + \gamma)^2 \quad (3.5)$$

Una vez definida la geometría de la barra, este autor analizó, por el método estático, un caso particular para una barra empotrada en un extremo y libre en el otro, y sometida a una carga axial,  $P$ , en ambos extremos, tal como se muestra en la Figura 3.2.

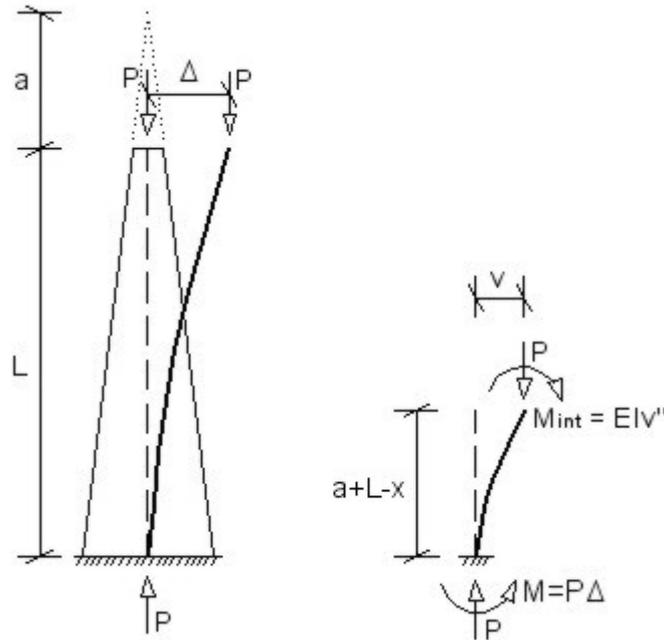


Figura 3.2: Esquema de análisis de Timoshenko

Estableciendo las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos internos y externos a la barra, tenemos que:

$$\text{Momento externo: } M_{ext} = P \cdot v(x) - P \cdot \Delta$$

$$\text{Momento interno: } M_{int} = EI(x) \cdot v''(x) = EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$$

Con lo que la condición de equilibrio es:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - P\Delta = 0 \quad (3.6)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (3.7)$$

La ecuación queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - k^2 a^2 \Delta = 0 \quad (3.8)$$

Ecuación diferencial de segundo orden que corresponde al tipo de las *ecuaciones de Euler*, la cual se transforma en una ecuación diferencial *lineal de coeficientes constantes* haciendo el cambio de variable:

$$\frac{x}{a} = e^t \quad (3.9)$$

Dicho cambio se muestra a continuación:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dv}{dt} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dv}{dt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sustituyendo la ecuación (3.11) en la (3.8) tenemos:

$$v''(t) - v'(t) + k^2 a^2 v(t) - k^2 a^2 \Delta = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación diferencial de coeficientes constantes tiene la siguiente solución general:

$$v(t) = A\sqrt{e^t} \sin \delta t + B\sqrt{e^t} \cos \delta t + \Delta \quad (3.13)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (3.14)$$

Deshaciendo el cambio de variable, la ecuación (3.13) queda:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + \Delta \quad (3.15)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$  debemos aplicar las condiciones de contorno de la barra:

$$v(a) = \Delta \quad (3.16)$$

$$v(a + L) = 0 \quad (3.17)$$

$$v'(a + L) = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando la primera condición tenemos que  $B = 0$ , y si aplicamos la segunda, se obtiene que:

$$A = \frac{-\Delta}{\sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \quad (3.19)$$

Así pues la ecuación de la deformada queda:

$$v(x) = \frac{-\Delta}{\sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (3.20)$$

Finalmente aplicando la última condición (3.18) se llega a:

$$\tan(\delta \ln(1 + \gamma)) = -2\delta \quad (3.21)$$

Esta es una ecuación trigonométrica de la que despejar  $\delta$  analíticamente es imposible de manera exacta. Timoshenko propone resolver la ecuación de manera numérica, una vez conocido el valor de  $\gamma$ . De esta manera se obtiene el menor valor de  $\delta$  que satisface la ecuación, y de ahí podemos despejar el valor de  $k$ , y por tanto la carga de pandeo,  $P_p$ :

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \Rightarrow k = \frac{\gamma}{L} \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{4}} \quad (3.22)$$

Y sabiendo que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (3.23)$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \frac{\gamma^2 \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) EI_a}{L^2} = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (3.24)$$

Donde podemos ver que la carga de pandeo de la barra de inercia variable depende directamente del coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ , y del parámetro  $\delta$ , el cual se obtiene de la condición de equilibrio de la barra, como comentamos anteriormente. Ambos parámetros se pueden englobar en uno sólo,  $m$ , que Timoshenko calculó de manera discreta plasmándolo en el Cuadro 3.1.

Se puede ver como para  $I_a/I_{a+L} = 1$ , la barra es de inercia constante, y el valor de  $m$  reproduce justamente la carga de pandeo de Euler para una barra empotrada-libre:

$\frac{I_a}{I_{a+L}}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$m$	0.25	1.35	1.59	1.76	1.90	2.02	2.13	2.22	2.31	2.39	$\pi^2/4$

Cuadro 3.1: Valores de  $m$  para la carga de pandeo

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_a}{4L^2} = P_E \tag{3.25}$$

Como veremos, a lo largo de este trabajo se obtendrán expresiones analíticas aproximadas para el cálculo de  $\delta$ , que resultarán de gran utilidad, ya que no requieren el apoyo informático para el cálculo.

### 3.2. Cudós y Quintero

V. Cudós y F. Quintero, en su libro *Estructuras metálicas. La pieza aislada. Inestabilidad* [9], analizan la barra de inercia variable partiendo del mismo análisis estático que realizó Timoshenko, e intentan modelizarla como una barra de inercia constante. Dicha inercia será una *inercia equivalente*,  $I_{eq}$ , tal que la carga de pandeo de una barra de inercia variable,  $I(x)$ , y longitud,  $L$ , sea igual a la carga de pandeo de una barra de inercia constante,  $I_{eq}$ , y de la misma longitud que la anterior (Figura 3.3). Además, la longitud de pandeo a considerar para la barra de inercia variable será la misma que aparece en los casos de Euler<sup>1</sup>, es decir, en este caso tendremos  $L_k = 2L$ , ya que la barra es empotrada-libre. Según esto tenemos que:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{4L^2} \tag{3.26}$$

De la equivalencia (3.26) podemos despejar fácilmente el valor del momento de inercia equivalente:

$$I_{eq} = \frac{4m}{\pi^2} I_a = bI_a \tag{3.27}$$

También podemos conocer a que altura de la barra de inercia variable está la sección de inercia equivalente:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{4m}{\pi^2} I_a \tag{3.28}$$

---

<sup>1</sup>Más adelante podremos ver como la longitud de pandeo de una barra de inercia variable no coincide, en la mayoría de los casos, con la longitud de pandeo de su barra equivalente de inercia constante, aun teniendo ambas las mismas condiciones de sustentación en sus extremos.

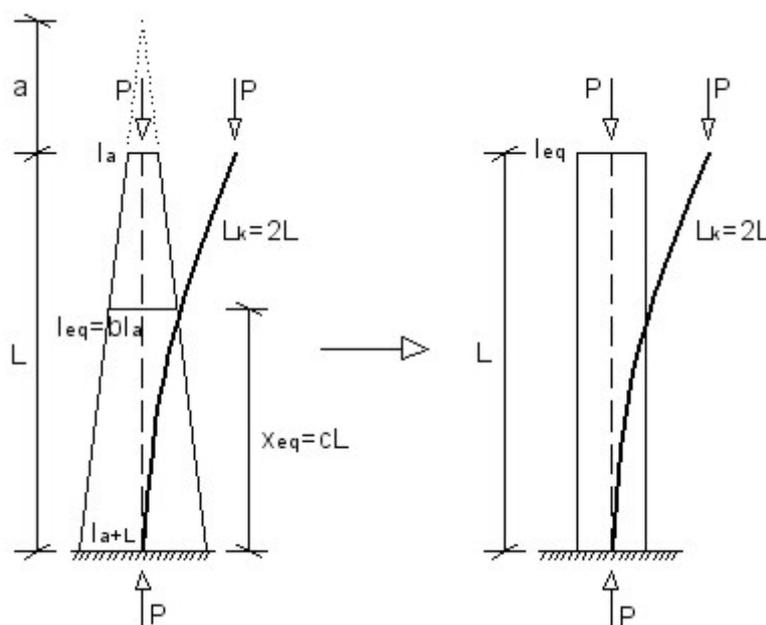


Figura 3.3: Barra de inercia equivalente

$$x_{eq} = \frac{2\sqrt{m}}{\gamma\pi} L = cL \quad (3.29)$$

Como se puede ver, tanto el valor de  $I_{eq}$ , como su posición en la barra,  $x_{eq}$ , son función de  $b$  y  $c$ , los cuales dependen únicamente del grado de ahusamiento,  $\gamma$ , de la barra de inercia variable.

### 3.3. Ballio y Mazzolani

G. Ballio y F. M. Mazzolani, en su libro *Theory and design of steel structures* [4], realizan un análisis similar al de Cudós y Quintero, modelizando la barra de inercia variable como una barra de inercia constante equivalente. Sin embargo, estos autores analizan el caso de una barra biarticulada, en vez de empotrada-libre como hicieron los autores anteriores.

En este caso, los autores proponen que el momento de inercia equivalente de la barra es:

$$I_{eq} = \left(0,08 + \frac{0,92}{1 + \gamma}\right) I_a = bI_a \quad (3.30)$$

### 3.4. Galambos

T. V. Galambos, en su libro *Guide to stability design criteria for metal structures* [14], se centra también en la barra biarticulada de inercia variable, pero con un enfoque ligeramente diferente a los vistos anteriormente. Este autor, aunque también modeliza la barra como una de inercia constante, no usa el concepto de momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ , sino que establece el llamado *coeficiente de esbeltez equivalente*,  $\beta_{eq}$ .

Según esto, la carga de pandeo de una barra de inercia variable,  $I(x)$ , y longitud,  $L$ , será igual a la de una barra con inercia constante, e igual a la inercia menor de la barra,  $I_a$ , y con una longitud,  $L_{eq} = \beta_{eq}L$ , denominada *longitud equivalente* (Figura 3.4). Así pues:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_a}{\beta_{eq}^2 L^2} \tag{3.31}$$

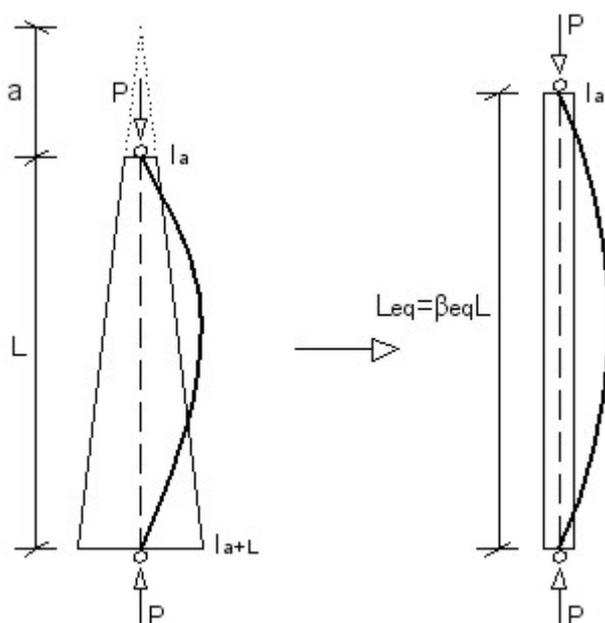


Figura 3.4: Barra de longitud equivalente

Por tanto, el coeficiente de pandeo equivalente se puede expresar como:

$$\beta_{eq} = \frac{\pi}{\sqrt{m}} \tag{3.32}$$

El autor propone el siguiente coeficiente ajustado experimentalmente en función del ahusamiento de la barra,  $\gamma$ :

$$\beta_{eq} = 1 - 0,375\gamma + 0,08\gamma^2(1 - 0,0775\gamma) \quad (3.33)$$

### 3.5. Belluzi

O. Belluzi, en su libro *Ciencia de la construcción* [5], propone emplear el método energético para abordar el problema de la barra de inercia variable, de tal manera que la carga de pandeo se ajusta a una expresión del tipo:

$$P_p^{ext} = \frac{E \int_0^L v'(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L \frac{v(x)^2}{I(x)} \cdot dx} \quad (3.34)$$

O bien:

$$P_p^{int} = \frac{E \int_0^L I(x)v''(x)^2 \cdot dx}{\int_0^L v'(x)^2 \cdot dx} \quad (3.35)$$

Dependiendo de si usamos el momento externo o interno en el cálculo del trabajo de deformación, usaremos una u otra expresión.

Como ya es sabido, la dificultad del método energético reside en la estimación de una ley de la deformada,  $v(x)$ , que se amolde bien al problema. No obstante, en principio, con que la ecuación cumpla las condiciones de contorno de la barra es suficiente para obtener una buena aproximación a la carga de pandeo. Además, siempre se puede seguir afinando en la ecuación de  $v(x)$  por iteraciones sucesivas.

### 3.6. NBE, EA-95

En la norma española de estructuras metálicas, EA-95, se propone un método a seguir para el cálculo a pandeo de barras biarticuladas de inercia variable. Se expone a continuación:

Artº 3.2.5.4

La esbeltez mecánica de una pieza de sección variable, con extremos articulados, se calculará tomando el siguiente valor del radio de giro:

$$i\sqrt{\frac{cI_{\text{máx}}}{A_m}} \quad (3.36)$$

Donde:

- $I_{\text{máx}}$ , es el momento de inercia máximo respecto del eje normal al plano de pandeo considerado.
- $A_m$ , es el valor medio del área de la sección resistente a lo largo de la pieza.
- $c$ , es un coeficiente que depende de la geometría de la barra.

Según esto, la esbeltez mecánica será:

$$\lambda = \frac{L_k}{\sqrt{\frac{cI_{\text{máx}}}{A_m}}} \quad (3.37)$$

Siendo  $L_k$ , la longitud de pandeo de la barra, que en este caso coincide con la propia longitud real de la barra,  $L$ , por tratarse de una barra articulada en ambos extremos.

La carga de pandeo vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P_p = \frac{\pi^2 EcI_{\text{máx}}}{L^2} \quad (3.38)$$

Es decir, al igual que otros autores, se propone la modelización de la barra de inercia variable como una barra de inercia constante equivalente, siendo en este caso  $I_{eq} = cI_{\text{máx}}$ .

## Parte II

# Análisis de pandeo por flexión en barras de inercia variable con diversas condiciones de sustentación

# Capítulo 4

## Objetivos y justificación

Como objetivo principal de este trabajo se pretende realizar una aportación al estudio del pandeo por flexión en barras aisladas de inercia variable, considerando diversas condiciones de sustentación en sus extremos que nos permitan cubrir un gran abanico de posibilidades a la hora del diseño de este tipo de elementos. En todo momento el análisis se centrará en columnas o barras ideales, ya que a partir de los resultados obtenidos para estas, es posible definir el comportamiento de la columna real, de manera inmediata, mediante la aplicación de los métodos propios de las barras de inercia constante.

No se tratará en este trabajo el pandeo de redes estructurales complejas, pero sí se prestará atención a las diversas vinculaciones en los extremos de la barra que puedan modelizar, en cierta forma, la unión de dicha barra con otros elementos de una red estructural.

Para cumplir el objetivo principal se establecerán los siguientes objetivos parciales:

1. Análisis sistemático del fenómeno de pandeo por flexión en la barra aislada de inercia variable mediante el uso de la vía analítica. De esta manera intentaremos conocer la esencia del fenómeno de pandeo en este tipo de barras, observando como se comportan bajo diferentes condiciones de carga y sustentación.
2. Propuesta de un método para el cálculo y la comprobación de pandeo en barras de inercia variable. Se intentará proponer un modelo para representar la barra de inercia variable como una barra equivalente de inercia constante, prestando especial atención a la estimación de los parámetros representativos tales como longitudes equivalentes, momentos de inercia equivalentes, esbelteces, radios de giro, etc.

3. Elaboración de diagramas, tablas y gráficos que faciliten la aplicación de la metodología de cálculo propuesta.
4. Resolución de algunos problemas prácticos para contrastar los resultados obtenidos por la metodología propuesta con los resultantes de otros métodos recogidos en la bibliografía.

Como justificación a este trabajo, es importante resaltar que los perfiles con inercia variable son cada vez más empleados en la construcción de naves industriales, ya que estos permiten una mejor optimización de la estructura y un consecuente ahorro de material, sobre todo en pórticos en los que las luces a salvar son muy elevadas.

A esto se suma que, como hemos podido observar en el capítulo 3, la información disponible en la bibliografía sobre el pandeo por flexión en la barra de inercia variable es bastante escasa. Además, los autores sólo tratan el tema de manera muy superficial, con lo que es difícil obtener conclusiones válidas y útiles para afrontar el problema que nos ocupa.

Esta falta de información puede ser debida a que, hoy en día, el cálculo de estructuras compuestas por elementos de inercia variable está ya resuelto por las aplicaciones informáticas y los métodos numéricos. Esto ha dado lugar a que los investigadores hayan abandonado este tema como vía de estudio prioritaria.

Sin embargo, en nuestra opinión, el problema del pandeo en barras de inercia variable no parece estar aún completamente claro. Existen soluciones numéricas y cuantitativas a problemas concretos, pero no existe una postura clara y consensuada en cuanto a las características básicas cualitativas del fenómeno de pandeo en este tipo de piezas. Esto se ha podido comprobar en la revisión bibliográfica realizada.

Es frecuente que en la mayoría de las ocasiones, cuando se calculan estructuras con elementos de inercia variable, se sobredimensionen algunas secciones para tener seguridad de que el pandeo no será un problema. Esta es una práctica que va en contra de la filosofía de la barra de inercia variable, ya que si son elementos fabricados para optimizar, no parece lógico el sobredimensionar dichos elementos por un problema de incertidumbre de lo que pueda ocurrir en condiciones de inestabilidad.

Creemos por tanto que hay que abordar el problema comenzando desde el origen, y haciendo un análisis cualitativo completo del fenómeno que nos permita entenderlo con claridad, para posteriormente proponer modelos de cálculo válidos y fiables.

El uso de la vía analítica para la resolución de las condiciones de equilibrio de las barras, así como la obtención de cargas de pandeo y otros parámetros

de interés, como se comentó en 2.1.1.3, se debe a que es la única manera de conocer como se comporta la barra frente a pandeo como una unidad estructural.

Los métodos numéricos de cálculo, discretizan la barra y asocian las condiciones de equilibrio a rebanadas infinitesimales de la misma, de tal manera que los resultados obtenidos, aun siendo válidos, no representan el comportamiento global de la barra. En definitiva, la vía numérica sólo proporciona soluciones cuantitativas, mientras que la vía analítica permite además obtener una visión cualitativa del problema, que es esencialmente lo que se busca en este trabajo.

Por tanto, creemos que merece la pena sacrificar la facilidad y potencia de cálculo de los métodos numéricos, y enfrentarnos a la resolución analítica de las ecuaciones de equilibrio, tarea difícil en la mayoría de los casos.

# Capítulo 5

## Materiales y métodos empleados

A continuación se describirán, a grandes rasgos, los materiales y métodos físicos, matemáticos y técnicos que se han empleado en la elaboración de este proyecto de investigación, los cuales han sido necesarios para dar solución al problema planteado.

### 5.1. Material informático

#### 5.1.1. Equipo informático

- Ordenador personal con procesador de 1.6 GHz y 480 MB de memoria RAM. Disco duro con 40 GB de capacidad de almacenamiento.
- Impresora de inyección de tinta.
- Conexión a internet.

#### 5.1.2. Programas informáticos

- Editor de texto *LyX*, Versión 1.3.3-Win32.
- Editor de texto *Microsoft Word XP*.
- Visualizador de texto *Adobe Reader 6.0*.
- Editor de diapositivas *Microsoft PowerPoint XP*.
- Editor de hojas de cálculo *Microsoft Excel XP*.
- Programas de tratamiento matemático y análisis de datos: *Mathematica 4.1*, *Derive 5.0*, *Maple 9.0*, *Matlab 5.3*, *Surfer 8.0*.

- Programas para diseño de imágenes y esquemas: *Autocad 2005*, *Corel-Draw 9.0*.

## 5.2. Métodos referentes a la teoría de estructuras

Entre las teorías y métodos referentes a la física (estática) y al análisis estructural que se han empleado en este trabajo, se incluyen nociones básicas de resistencia de materiales y elasticidad, así como conceptos de estabilidad estructural que han sido incluidos en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

Toda esta información puede encontrarse también con más detalle en las referencias bibliográficas.

## 5.3. Métodos matemáticos

En cuanto a la herramienta matemática empleada, se citarán las áreas fundamentales de conocimiento que han sido necesarias para la elaboración de este trabajo:

- Resolución analítica y numérica de ecuaciones diferenciales.
- Ecuaciones potenciales y exponenciales.
- Ecuaciones trigonométricas.
- Números complejos.
- Ecuaciones elípticas.
- Análisis y representación gráfica de funciones.
- Sucesiones, series y suma de series.
- Geometría euclídea.
- Álgebra lineal.

# Capítulo 6

## La columna ideal de inercia variable

En este capítulo analizaremos la columna ideal de inercia variable bajo diferentes condiciones de sustentación en sus extremos. Concretamente, intentaremos reproducir los cinco casos que Euler desarrolló para la columna de inercia constante, pero en este caso tendremos en cuenta que la inercia es variable. Estudiaremos cada caso por el método estático, el cual nos dará soluciones exactas. Finalmente se obtendrán los parámetros fundamentales que nos permitan caracterizar la barra de inercia constante equivalente a la barra de inercia variable para cada uno de los cinco casos estudiados.

En el Anejo A de este trabajo, se muestran de manera resumida los resultados obtenidos en este capítulo.

La barra a estudiar tendrá las siguientes características, mostradas en la Figura 6.1:

- Longitud  $L$ .
- Longitud de convergencia de aristas  $a$ .
- Canto mínimo  $h_a$ .
- Canto máximo  $h_{a+L}$ .
- Área mínima  $A_a$ .
- Área máxima  $A_{a+L}$ .
- Momento de inercia mínimo  $I_a$ .
- Momento de inercia máximo  $I_{a+L}$ .

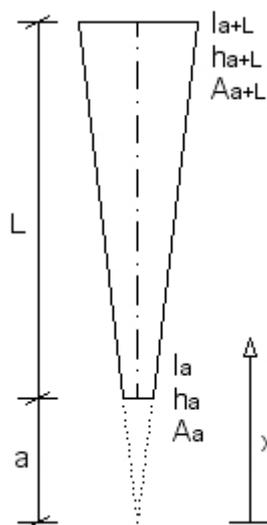


Figura 6.1: Barra de inercia variable

- Coeficiente de ahusamiento, definido como:

$$\gamma = \frac{L}{a} = \frac{h_{a+L} - h_a}{h_a} \quad (6.1)$$

- Peso propio despreciable.
- Inercia variable según la ley de Timoshenko:

$$I(x) = I_a \left( \frac{x}{a} \right)^2 \quad (6.2)$$

De tal manera que  $I_a$  se encuentra en  $x = a$ , e  $I_{a+L}$  en  $x = a + L$ . Por ello, tenemos que entre ambos momentos de inercia extremos existe la relación:

$$I_{a+L} = I_a(1 + \gamma)^2 \quad (6.3)$$

Lo que nos permite dar una nueva definición del coeficiente de ahusamiento, la cual puede ser más práctica:

$$\gamma = \sqrt{\frac{I_{a+L}}{I_a}} - 1 \quad (6.4)$$

## 6.1. Columna de inercia variable biarticulada

### 6.1.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.2. El equilibrio de momentos es:

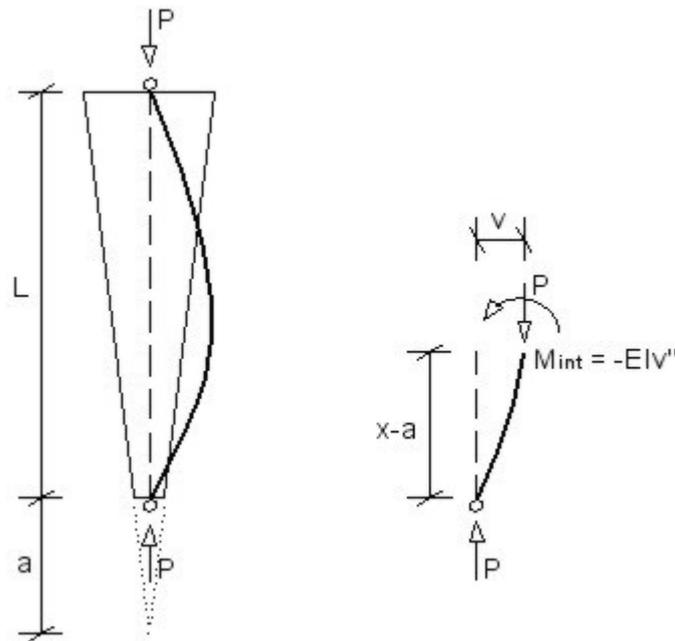


Figura 6.2: Barra biarticulada de inercia variable

Momento externo:  $M_{ext} = P \cdot v(x)$

Momento interno:  $M_{int} = -EI(x) \cdot v''(x) = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$

Igualando ambos momentos llegamos a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) = 0 \quad (6.5)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.6)$$

La ecuación queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) = 0 \quad (6.7)$$

Ecuación diferencial de segundo orden del tipo *Euler* que, como vimos anteriormente, se puede transformar en una E.D. lineal de coeficientes constantes haciendo el cambio de variable:

$$\frac{x}{a} = e^t \quad (6.8)$$

Resolviendo y deshaciendo el cambio, llegamos a la siguiente solución general para la deformada:

$$v(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) \quad (6.9)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.10)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , debemos aplicar las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (6.11)$$

$$v(a + L) = 0 \quad (6.12)$$

### Carga de pandeo

De la primera condición se obtiene que  $B = 0$ , y aplicando la segunda tenemos que:

$$A \sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \quad (6.13)$$

$$\sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \Rightarrow \delta \ln(1 + \gamma) = n\pi \quad (6.14)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Tomando  $n = 1$  (primer modo de pandeo) y despejando  $\delta$ , queda:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.15)$$

Si igualamos esta expresión con la definición de  $\delta$  (6.10):

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.16)$$

Podemos despejar  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1+\gamma)}} \quad (6.17)$$

También sabemos que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.18)$$

Por lo que despejando y reordenando términos, obtenemos la carga de pandeo para la barra:

$$P_p = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.19)$$

Ecuación que se puede expresar de manera simplificada como:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (6.20)$$

Con:

$$m = \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \quad (6.21)$$

Donde  $m$  es un parámetro que depende exclusivamente del grado de ahuecamiento de la barra,  $\gamma$ . Si hallamos el límite de  $m$  cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , es decir, la inercia de la barra tiende a ser constante y de valor  $I_a$ , se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = \pi^2 \quad (6.22)$$

Por lo que la carga de pandeo quedaría:

$$P_P = \frac{\pi^2 EI_a}{L^2} \quad (6.23)$$

Que es precisamente la expresión de la carga de pandeo de Euler para una barra biarticulada de inercia constante  $I_a$  (2.18).

$\gamma$	$m$
0.00	$\pi^2 \approx 9.87$
0.10	10.87
0.20	11.89
0.30	12.93
0.40	13.99
0.50	15.07
0.60	16.17
0.70	17.30
0.80	18.44
0.90	19.61
1.00	20.79
1.10	22.00
1.20	23.22
1.30	24.47
1.40	25.73
1.50	27.01
1.60	28.31
1.70	29.63
1.80	30.97
1.90	32.33
2.00	33.71

Cuadro 6.1: *Factor m para la barra biarticulada de inercia variable*

Por tanto, queda demostrado que la expresión (6.19) obtenida para la barra biarticulada de inercia variable es correcta, y representa una generalización de la fórmula de Euler, que nos permite conocer la carga de pandeo de una columna con variación de inercia a partir de su coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ .

Para un cálculo práctico, la expresión (6.19) se ha desarrollado en el Cuadro 6.1, de manera que una vez conocido el grado de ahusamiento,  $\gamma$ , podemos saber inmediatamente el valor de  $m$ , y por tanto, el valor de la carga de pandeo. En dicho cuadro,  $\gamma$  varía entre 0 y 2, que es el rango habitual de diseño propuesto en la bibliografía [22].

### Deformada de la barra

Ahora pasaremos a estudiar con detalle la ecuación de la deformada de la barra, cuya expresión matemática es finalmente:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) \quad (6.24)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{A\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ \frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) \right]}{2x} \quad (6.25)$$

$$v''(x) = -\frac{A\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ 1 + 4\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right)}{4x^2} \quad (6.26)$$

$$v'''(x) = -\frac{A\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ 1 + 4\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}\right)^2 \right] \left[ \frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right) \right]}{8x^3} \quad (6.27)$$

La deformada es de tipo senoidal, pero con ciertas peculiaridades, ya que debido al factor  $\sqrt{x/a}$ , la función va aumentando su amplitud a medida que aumenta  $x$ . Por otra parte, al existir un logaritmo dentro del seno, obtenemos una distancia entre puntos de inflexión creciente, es decir, la función se va “estirando” a medida que aumenta  $x$  (Figura 6.3). Además, podemos ver cómo la amplitud,  $A\sqrt{x/a}$ , queda indeterminada por la constante  $A$ , al igual que veíamos en la barra de inercia constante, debido al empleo de la expresión aproximada de la curvatura,  $\Phi(x) \approx v''(x)$ .

Si seguimos analizando la curva de la deformada, podemos ver que en su intervalo real,  $x \in [a, a + L]$ , es semejante a la deformada para la barra de inercia constante (Figura 2.3), con la salvedad de que la flecha máxima no se encuentra en el centro de la barra,  $x = a + L/2$ , sino algo desplazada hacia el extremo de menor inercia, ya que esa zona será la menos rígida y por tanto la más deformable.

Podemos hallar la expresión de la flecha máxima y su posición en la barra aplicando la condición  $v'(x) = 0$ , y despejando la abscisa  $x$  donde se produce tal flecha:

$$v'(x) = 0 \quad (6.28)$$

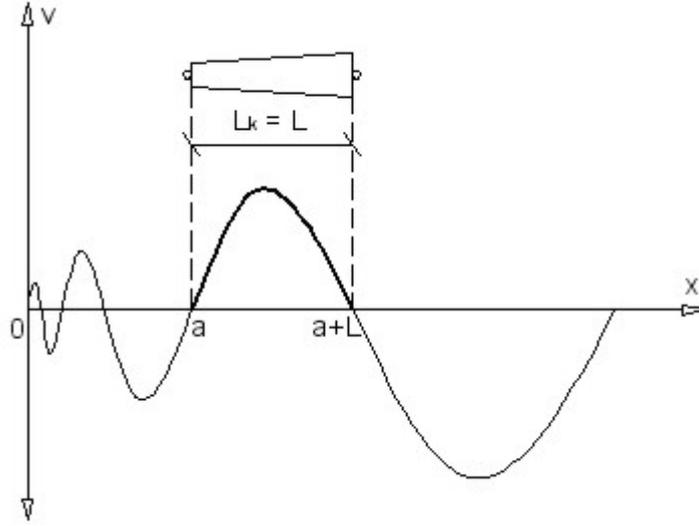


Figura 6.3: Deformada de la barra biarticulada de inercia variable

$$\frac{A\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ \frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) \right]}{2x} = 0 \quad (6.29)$$

Como  $x$  se encuentra con certeza en el intervalo  $[a, a + L]$ , y  $a \neq 0$  por motivos de diseño, podemos afirmar que  $x \neq 0$ , lo que nos permite concluir que:

$$\frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.30)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) = -\frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \quad (6.31)$$

Despejando  $x$  queda:

$$x_{f,\text{máx}} = a \exp\left[\frac{\pi + \arctan\left(-\frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)}\right)}{\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}}\right] \quad (6.32)$$

Y la flecha máxima será por tanto:

$$v_{\text{máx}} = v(x_{f,\text{máx}}) \quad (6.33)$$

Podemos comprobar fácilmente que cuando la barra tiende a ser de inercia constante, la flecha máxima se produce cerca de  $x = a + L/2$ , como era de esperar. La demostración se deduce del cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{f,\text{máx}} - a) = \frac{L}{2} \quad (6.34)$$

### Momentos flectores en la barra

La ley de momentos flectores en la barra es:

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \\ &= \frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 A \sqrt{\frac{x}{a}} \left[1 + 4 \left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}\right)^2\right] \sin\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right)}{4x^2} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Si queremos conocer el momento máximo, debemos aplicar la condición  $M'(x) = 0$ , o lo que es lo mismo  $v'''(x) = 0$ , y despejar la abscisa  $x$  donde se produce dicho momento:

$$v'''(x) = 0 \quad (6.36)$$

$$-\frac{A \sqrt{\frac{x}{a}} \left[1 + 4 \left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}\right)^2\right] \left[\frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right)\right]}{8x^3} = 0 \quad (6.37)$$

Volviendo ha tener en cuenta que  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , tenemos que:

$$\frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \cos\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)}\right) = 0 \quad (6.38)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a}\right) = \frac{2\pi}{3 \ln(1+\gamma)} \quad (6.39)$$

Despejando  $x$  queda:

$$x_{m,\text{máx}} = a \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\pi}{3 \ln(1+\gamma)}\right)}{\frac{\pi}{\ln(1+\gamma)}}\right] \quad (6.40)$$

Y el momento máximo será por tanto:

$$M_{\text{máx}} = M(x_{m,\text{máx}}) \quad (6.41)$$

Podemos comprobar también que si la barra tiende a ser de inercia constante, el momento máximo se produce en  $x = a + L/2$ :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{m,\text{máx}} - a) = \frac{L}{2} \quad (6.42)$$

### Longitud de pandeo

Aplicando la condición de inflexión,  $v''(x) = 0$ , podemos hallar la distancia entre puntos de inflexión consecutivos, es decir, la longitud de pandeo,  $L_k$ . Como antes se ha comentado, el logaritmo que aparece dentro del seno hace que la distancia entre puntos de inflexión sea creciente a medida que aumenta  $x$ . Por ello, en este caso tendremos que fijarnos en la distancia entre puntos de inflexión comprendidos en el intervalo físico de la barra,  $x \in [a, a + L]$ , y no el matemático,  $x \in \mathbb{R}$ .

Según lo dicho, procedamos al cálculo de la longitud de pandeo:

$$v''(x) = 0 \quad (6.43)$$

$$-\frac{A\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ 1 + 4 \left( \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \right)^2 \right] \sin \left( \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a} \right)}{4x^2} = 0 \quad (6.44)$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \ln \frac{x}{a} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1+\gamma)} = n\pi \quad (6.45)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\ln \frac{x}{a} = n \ln(1+\gamma) \quad (6.46)$$

$$\ln \frac{x}{a} = n \ln \left( \frac{a+L}{a} \right) \quad (6.47)$$

$$\frac{x}{a} = \left( \frac{a+L}{a} \right)^n \quad (6.48)$$

La distancia entre puntos de inflexión será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  dentro del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x_0 = a \quad (6.49)$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{a + L}{a} \Rightarrow x_1 = a + L \quad (6.50)$$

Por tanto:

$$L_k = \Delta x = x_1 - x_0 = (a + L) - a = L \quad (6.51)$$

Se puede ver que la longitud de pandeo coincide con la longitud real de la barra,  $L$ , al igual que veíamos en el caso de la barra de inercia constante (caso 1 de Euler, (2.28)), con lo que el coeficiente de esbeltez es  $\beta = 1$ . Esto nos permite afirmar que *la longitud de pandeo de una columna biarticulada es siempre igual a su propia longitud, independientemente del grado de ahusamiento de la barra.*

### 6.1.2. Columna equivalente

Una vez estudiada la columna biarticulada de inercia variable, pasaremos a modelizar esta como una columna equivalente de inercia constante. Esto nos permitirá resolver el problema del pandeo de una manera más práctica.

Se pretenden obtener los parámetros característicos de una barra de sección e inercia constante que tenga la misma carga de pandeo y longitud de pandeo que la barra de inercia variable que estamos estudiando, tal y como se muestra en la Figura 6.4.

Según esto, podemos expresar la equivalencia de la carga de pandeo de la siguiente forma:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{L^2} \quad (6.52)$$

Siendo:

$$m = \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \quad (6.53)$$

Y donde  $I_{eq}$ , es el *momento de inercia equivalente* de la barra de inercia constante, que será representativo de la barra de inercia variable. Su valor es:

$$I_{eq} = bI_a \quad (6.54)$$

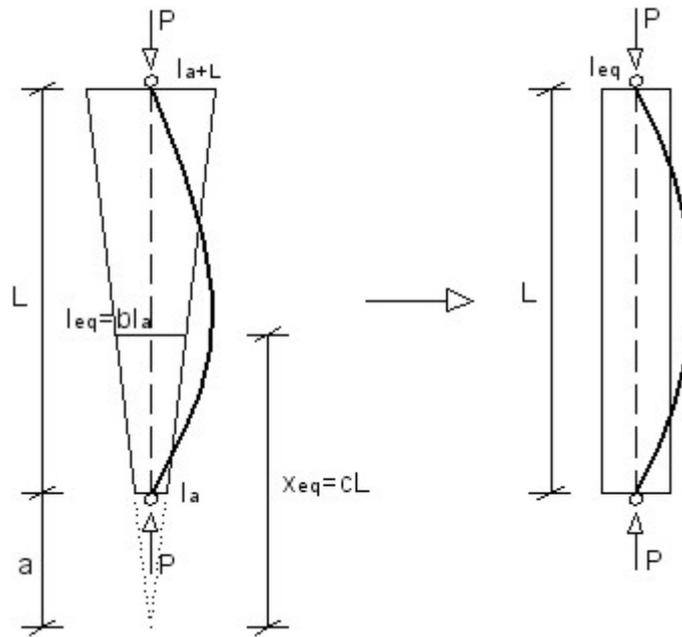


Figura 6.4: Columna equivalente para la barra biarticulada de inercia variable

$$b = \frac{m}{\pi^2} \tag{6.55}$$

En el Cuadro 6.2 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable se puede hallar recurriendo a la ley de inercia:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m}{\pi^2} I_a \tag{6.56}$$

$$x_{eq} = cL \tag{6.57}$$

$$c = \sqrt{\frac{m}{\pi^2 \gamma^2}} \tag{6.58}$$

La esbeltez mecánica equivalente de la barra será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \tag{6.59}$$

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.10
0.20	1.20
0.30	1.31
0.40	1.42
0.50	1.53
0.60	1.64
0.70	1.75
0.80	1.87
0.90	1.99
1.00	2.11
1.10	2.23
1.20	2.35
1.30	2.48
1.40	2.61
1.50	2.74
1.60	2.87
1.70	3.00
1.80	3.14
1.90	3.28
2.00	3.41

Cuadro 6.2: Valores de  $b$  para la barra biarticulada de inercia variable

Donde  $A_{eq}$ , es el *área equivalente*, situada en el punto  $x = x_{eq}$ , al igual que el momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ .

Quedan por tanto definidas las características geométricas de la columna equivalente, que debemos emplear para la comprobación de pandeo en la columna biarticulada de inercia variable.

## 6.2. Columna de inercia variable empotrada en un extremo y libre en el otro

### 6.2.1. Caso A: Empotrada-libre

#### 6.2.1.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.5. El equilibrio de momentos es:

$$\text{Momento externo: } M_{ext} = P \cdot v(x) - P \cdot \Delta$$

$$\text{Momento interno: } M_{int} = EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$$

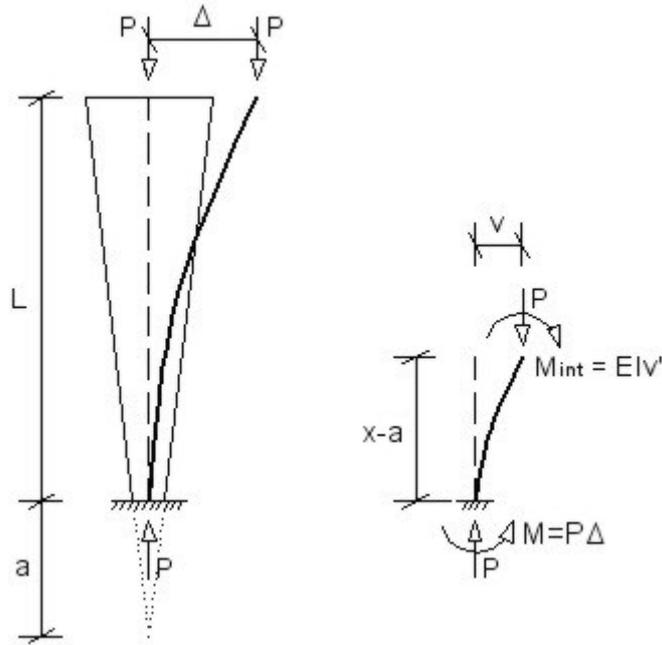


Figura 6.5: Barra empotrada-libre de inercia variable

Y la ecuación de equilibrio es en este caso:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - P\Delta = 0 \quad (6.60)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.61)$$

La ecuación queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - k^2 a^2 \Delta = 0 \quad (6.62)$$

Ecuación diferencial cuya solución general es:

$$v(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + \Delta \quad (6.63)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.64)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (6.65)$$

$$v'(a) = 0 \quad (6.66)$$

$$v(a + L) = \Delta \quad (6.67)$$

Aplicando las dos primeras condiciones tenemos que:

$$B = -\Delta \quad (6.68)$$

$$A = \frac{\Delta}{2\delta} \quad (6.69)$$

Por lo que la deformada de la barra queda:

$$v(x) = \frac{\Delta}{2\delta} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) - \Delta \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + \Delta \quad (6.70)$$

### Carga de pandeo

Si aplicamos la tercera condición de contorno:

$$v(a + L) = \Delta \quad (6.71)$$

Se obtiene:

$$\tan(\delta \ln(1 + \gamma)) = 2\delta \quad (6.72)$$

Como se observa, esta es una expresión trigonométrica implícita, de la que despejar  $\delta$  analíticamente es difícil de manera exacta. La vía más sencilla sería resolver la ecuación numéricamente una vez conocido  $\gamma$ . No obstante, se ha obtenido una expresión analítica aproximada mediante el desarrollo en serie de la tangente. Veamos el procedimiento:

En primer lugar haremos el siguiente cambio de variable:

$$u = \delta \ln(1 + \gamma) \quad (6.73)$$

Por lo que tenemos:

$$\tan u = \frac{2u}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.74)$$

Si desarrollamos en serie la tangente:

$$\tan u = u + 0,333u^3 + 0,133u^5 + 0,0539u^7 + 0,0219u^9 + \dots \quad (6.75)$$

Para alterar los coeficientes y exponentes de la serie a nuestro favor, realizaremos la siguiente operación:

$$\frac{3(\tan u - u)}{u^3} = 1 + 0,4u^2 + 0,162u^4 + 0,0656u^6 + \dots \quad (6.76)$$

Ahora volvemos a cambiar la variable:

$$u = \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \quad (6.77)$$

Con lo que nos queda:

$$\frac{3 \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right) - \left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right) \right]}{\left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right)^3} = 1 + 0,987t + 0,986t^2 + 0,986t^3 + \dots \quad (6.78)$$

Serie que se estabiliza para un coeficiente constante de 0,986, lo que nos permite hacer la siguiente suma geométrica aproximada:

$$\frac{3 \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right) - \left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right) \right]}{\left( \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \right)^3} \approx 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1 - t} \quad (6.79)$$

Volviendo a la expresión de partida, comenzamos a operar:

$$\tan u = \frac{2u}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.80)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right) = \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.81)$$

$$\frac{3\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)\right]}{\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)^3} = \frac{3\left[\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)}{\ln(1 + \gamma)} - \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)\right]}{\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)^3} \quad (6.82)$$

Sustituyendo ahora en el primer miembro la expresión obtenida en (6.79):

$$\frac{1}{1 - t} \approx \frac{3\left[\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)}{\ln(1 + \gamma)} - \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)\right]}{\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)^3} \quad (6.83)$$

Si deshacemos los cambios de variable:

$$u = \delta \ln(1 + \gamma) = \frac{\pi}{2}\sqrt{t} \Rightarrow t = \left(\frac{2\delta \ln(1 + \gamma)}{\pi}\right)^2 \quad (6.84)$$

Llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{2\delta \ln(1 + \gamma)}{\pi}\right)^2} = \frac{3[2 - \ln(1 + \gamma)]}{\delta^2 \ln^3(1 + \gamma)} \quad (6.85)$$

De donde finalmente podemos despejar  $\delta$ :

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 - 3\ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12)\ln(1 + \gamma)}} \quad (6.86)$$

Igualando esta expresión con la (6.64):

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 - 3\ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12)\ln(1 + \gamma)}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.87)$$

Y despejando  $k$ , queda:

$$k = \sqrt{\frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6 - 3\ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12)\ln(1 + \gamma)}\right) + \ln^2(1 + \gamma)\right] \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.88)$$

Sabiendo que:

$\gamma$	$m$
0.00	$\pi^2/4 \approx 2.47$
0.10	2.61
0.20	2.76
0.30	2.90
0.40	3.03
0.50	3.17
0.60	3.31
0.70	3.44
0.80	3.57
0.90	3.71
1.00	3.84
1.10	3.97
1.20	4.09
1.30	4.22
1.40	4.35
1.50	4.48
1.60	4.60
1.70	4.73
1.80	4.85
1.90	4.97
2.00	5.10

Cuadro 6.3: Factor  $m$  para la barra empotrada-libre de inercia variable

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \tag{6.89}$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \left[ \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{6-3\ln(1+\gamma)}{24+(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)} \right) + \ln^2(1+\gamma) \right] \gamma^2}{4\ln^2(1+\gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \tag{6.90}$$

Expresión que se ajusta a la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \tag{6.91}$$

Donde:

$$m = \frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6-3\ln(1+\gamma)}{24+(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1+\gamma)\right] \gamma^2}{4\ln^2(1+\gamma)} \quad (6.92)$$

Llevando  $m$  a las proximidades de la barra de inercia constante, se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = \frac{\pi^2}{4} \quad (6.93)$$

Por lo que la carga de pandeo quedaría:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_a}{4L^2} \quad (6.94)$$

Que es precisamente la expresión de la carga de pandeo de Euler para una barra empotrada-libre de inercia constante  $I_a$ , y que confirma la validez de la fórmula obtenida para la barra de inercia variable (6.90).

Para un cálculo práctico de la carga de pandeo, la expresión (6.90) se ha desarrollado en el Cuadro 6.3, relacionándose cada valor del ahusamiento,  $\gamma$ , con su correspondiente valor de  $m$ .

### Deformada de la barra

La expresión matemática para la deformada de la barra es:

$$v(x) = \frac{\Delta}{2\delta} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \Delta \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.95)$$

Siendo como ya sabemos:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \sqrt{\frac{6-3\ln(1+\gamma)}{24+(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}} \quad (6.96)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(1+4\delta^2)\Delta \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4x\delta} \quad (6.97)$$

$$v''(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(1+4\delta^2)\Delta [2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8x^2\delta} \quad (6.98)$$

$$v'''(x) = -\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(1+4\delta^2)\Delta [8\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + (4\delta^2-3)\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{16x^3\delta} \quad (6.99)$$

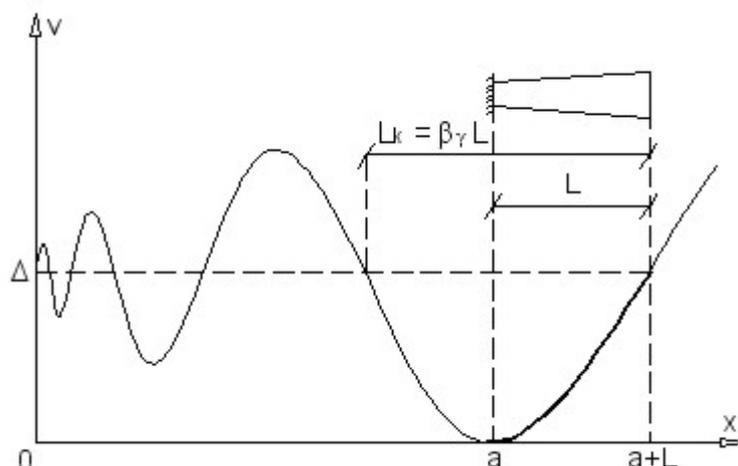


Figura 6.6: Deformada de la barra empotrada-libre de inercia variable

La deformada es tipo senoidal, muy similar a la obtenida para la barra biarticulada (6.24), pero en este caso la curva está desplazada en el eje de ordenadas una distancia  $v(x) = \Delta$ . La Figura 6.6 muestra la gráfica de la deformada.

En cuanto a la flecha máxima, en este caso conocemos de antemano que esta se sitúa en el extremo libre de la barra,  $x = a + L$ , y su valor es:

$$v_{\text{máx}} = v(a + L) = \Delta \tag{6.100}$$

### Momentos flectores en la barra

La ley de momentos flectores es:

$$M(x) = EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \Delta [2\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8x^2 \delta} \tag{6.101}$$

Respecto al momento máximo, sabemos por las condiciones de contorno que se produce en el extremo empotrado,  $x = a$ , y tiene el valor:

$$M_{\text{máx}} = M(a) = P\Delta \tag{6.102}$$

### Longitud de pandeo

Aplicaremos de nuevo la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.103)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(1 + 4\delta^2)\Delta [2\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8x^2\delta} = 0 \quad (6.104)$$

Y como  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , tenemos que:

$$2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.105)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 2\delta \quad (6.106)$$

Si despejamos  $x$ , queda:

$$x = a \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + n\pi}{\delta}\right) = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + n\pi}{\delta}\right) \quad (6.107)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  en el entorno del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = -1$  y  $n = 0$ :

$$n = -1 \Rightarrow x_{-1} = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\arctan 2\delta - \pi}{\delta}\right) \quad (6.108)$$

$$n = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \quad (6.109)$$

Por tanto, teniendo en cuenta los signos:

$$\begin{aligned} L_k = \Delta x &= x_0 - x_{-1} = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta - \pi}{\delta}\right) \right] = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[ \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi}{\delta}\right)\right) \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.110)$$

Se puede observar como en este caso la longitud de pandeo si que depende de el coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ . Esto hace que el coeficiente de esbeltez,  $\beta$ , sea también variable y dependiente de  $\gamma$ :

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	2.00
0.10	1.94
0.20	1.89
0.30	1.85
0.40	1.81
0.50	1.77
0.60	1.74
0.70	1.70
0.80	1.67
0.90	1.65
1.00	1.62
1.10	1.60
1.20	1.57
1.30	1.55
1.40	1.53
1.50	1.51
1.60	1.50
1.70	1.48
1.80	1.46
1.90	1.45
2.00	1.43

Cuadro 6.4: Coeficientes  $\beta_\gamma$  para la barra empotrada-libre de inercia variable

$$L_k = \beta_\gamma L \tag{6.111}$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( 1 - \exp\left(\frac{-\pi}{\delta}\right) \right) \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \tag{6.112}$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 - 3 \ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} \tag{6.113}$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_\gamma = 2 \tag{6.114}$$

Que es justamente el valor de  $\beta$  para una barra empotrada-libre de inercia constante, cuya longitud de pandeo es  $L_k = 2L$ .

Para un cálculo práctico de  $\beta_\gamma$ , se ha elaborado el Cuadro 6.4, donde se recogen los diferentes valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ . Se puede observar como a medida que aumenta el ahusamiento de la barra,  $\gamma$ , el coeficiente  $\beta_\gamma$  disminuye, contribuyéndose así al aumento de la resistencia a pandeo de la columna.

### 6.2.1.2. Columna equivalente

La transformación realizada para modelizar la columna equivalente se muestra en la Figura 6.7.

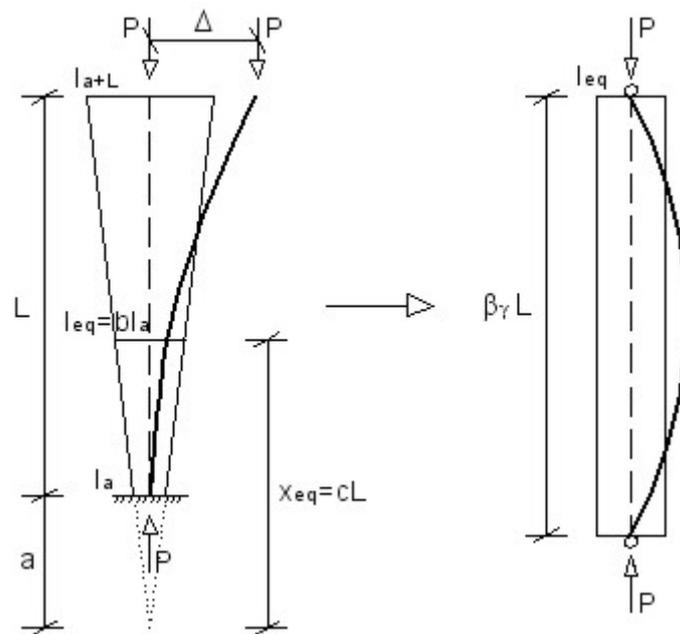


Figura 6.7: Columna equivalente para la barra empotrada-libre de inercia variable

La ecuación de equivalencia es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \tag{6.115}$$

Donde:

$$m = \frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6-3\ln(1+\gamma)}{24+(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1+\gamma)\right] \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \quad (6.116)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left[ \left(1 - \exp \frac{-\pi}{\delta}\right) \exp \left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \quad (6.117)$$

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \sqrt{\frac{6-3\ln(1+\gamma)}{24+(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}} \quad (6.118)$$

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.00
0.20	1.00
0.30	1.00
0.40	1.00
0.50	1.01
0.60	1.01
0.70	1.01
0.80	1.01
0.90	1.02
1.00	1.02
1.10	1.02
1.20	1.03
1.30	1.03
1.40	1.03
1.50	1.04
1.60	1.04
1.70	1.05
1.80	1.05
1.90	1.06
2.00	1.06

Cuadro 6.5: Valores de b para la barra empotrada-libre de inercia variable

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = bI_a \quad (6.119)$$

$$b = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} \quad (6.120)$$

En el Cuadro 6.5 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable será:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \quad (6.121)$$

$$x_{eq} = cL \quad (6.122)$$

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2\gamma^2}} \quad (6.123)$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \quad (6.124)$$

## 6.2.2. Caso B: Libre-empotrada

### 6.2.2.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.8. Este caso es similar al Caso A, con la única diferencia de que la barra está invertida, por lo que las condiciones de contorno también lo están.

La ecuación general de la deformada es ya conocida:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.125)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.126)$$

Las condiciones de contorno son en este caso:

$$v(a) = \Delta \quad (6.127)$$

$$v(a+L) = 0 \quad (6.128)$$

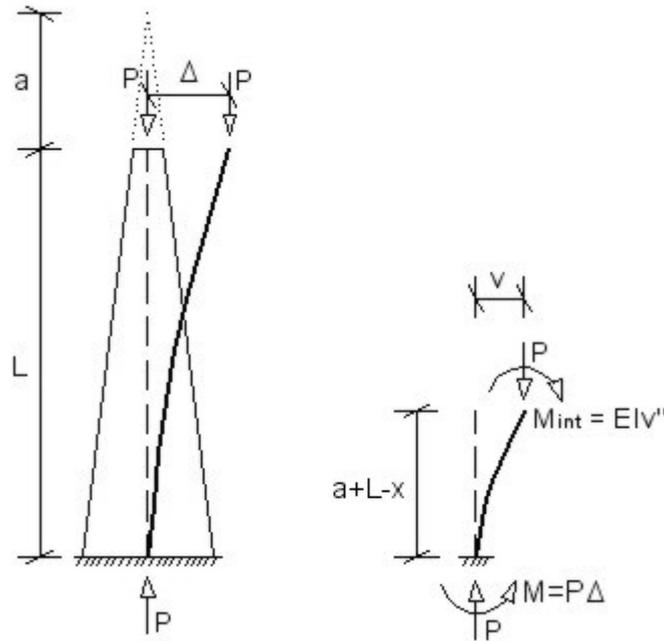


Figura 6.8: Barra libre-empotrada de inercia variable

$$v'(a + L) = 0 \tag{6.129}$$

Aplicando las dos primeras condiciones se obtienen las constantes de integración:

$$B = 0 \tag{6.130}$$

$$A = -\frac{\Delta}{\sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \tag{6.131}$$

Por lo que la ecuación de la deformada queda:

$$v(x) = -\frac{\Delta}{\sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \tag{6.132}$$

**Carga de pandeo**

Si aplicamos la tercera condición de contorno:

$$v'(a + L) = 0 \tag{6.133}$$

Se obtiene:

$$\tan(\delta \ln(1 + \gamma)) = -2\delta \quad (6.134)$$

Expresión similar a la que obteníamos para el Caso A (6.72), y de la cual también se ha obtenido una expresión analítica aproximada para despejar  $\delta$ , usando el mismo procedimiento empleado en (6.73) y sucesivas. Finalmente se llega a la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} \quad (6.135)$$

Igualando esta expresión con la (6.126):

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.136)$$

Y despejando  $k$ , queda:

$$k = \sqrt{\frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1 + \gamma)\right] \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.137)$$

Sabiendo que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.138)$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \left[ \frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1 + \gamma)\right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.139)$$

Expresión que se ajusta a la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (6.140)$$

Donde:

$$m = \frac{\left[4\pi^2 \left(\frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1 + \gamma)\right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \quad (6.141)$$

$\gamma$	$m$
0.00	$\pi^2/4 \approx 2.47$
0.10	2.82
0.20	3.19
0.30	3.58
0.40	3.99
0.50	4.41
0.60	4.84
0.70	5.29
0.80	5.76
0.90	6.24
1.00	6.73
1.10	7.24
1.20	7.76
1.30	8.30
1.40	8.85
1.50	9.42
1.60	10.00
1.70	10.59
1.80	11.19
1.90	11.81
2.00	12.44

Cuadro 6.6: Factor  $m$  para la barra libre-empotrada de inercia variable

Llevando  $m$  al límite cuando la barra tiende a ser de inercia constante:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = \frac{\pi^2}{4} \tag{6.142}$$

Por lo que la carga de pandeo quedaría:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_a}{4L^2} \tag{6.143}$$

Que es de nuevo la expresión de Euler para una barra de inercia constante empotrada en un extremo y libre en el otro, y que nos confirma la validez de la fórmula (6.139).

En el Cuadro 6.6 se recogen los valores de  $m$  para diferentes valores del ahusamiento,  $\gamma$ .

**Deformada de la barra**

La expresión matemática de la deformada de la barra es como ya sabemos:

$$v(x) = -\frac{\Delta}{\sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.144)$$

Con:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} \quad (6.145)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = -\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} \Delta [2\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) + \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{2x \sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \quad (6.146)$$

$$v''(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \Delta \sin(\delta \ln \frac{x}{a})}{4x^2 \sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \quad (6.147)$$

$$v'''(x) = -\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \Delta [2\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - 3 \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8x^3 \sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \quad (6.148)$$

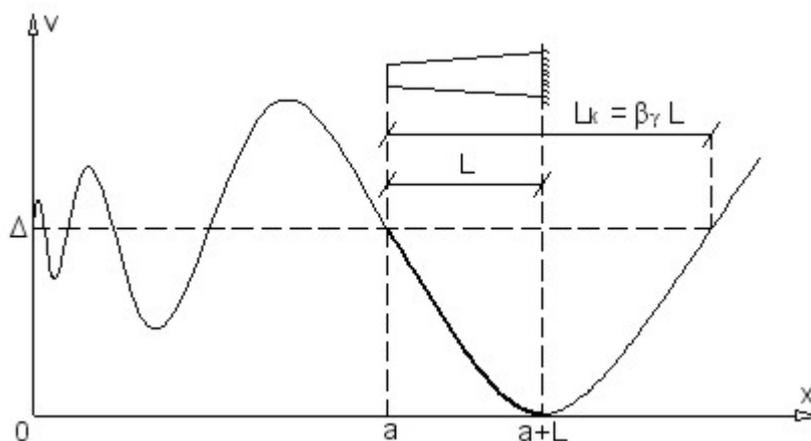


Figura 6.9: *Deformada de la barra libre-empotrada de inercia variable*

La deformada es idéntica a la de la barra empotrada-libre (Caso A), pero la curva está desfasada una longitud  $L$  respecto de la anterior, de manera que

en este caso el extremo  $x = a$  es libre y existe empotramiento en  $x = a + L$ . En la Figura 6.9 se muestra la gráfica de la deformada.

En cuanto a la flecha máxima, en este caso sabemos que se produce en  $x = a$ , y su valor es:

$$v_{\text{máx}} = v(a) = \Delta \quad (6.149)$$

### Momentos flectores en la barra

La ley de momentos flectores es:

$$\begin{aligned} M(x) &= EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \\ &= \frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \Delta \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4x^2 \sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \end{aligned} \quad (6.150)$$

El momento máximo en este caso se produce en  $x = a + L$ , y su valor es:

$$M_{\text{máx}} = M(a + L) = P\Delta \quad (6.151)$$

### Longitud de pandeo

Partimos de la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.152)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \Delta \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4x^2 \sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} = 0 \quad (6.153)$$

Y como  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , tenemos que:

$$\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.154)$$

$$\delta \ln \frac{x}{a} = n\pi \quad (6.155)$$

Despejando  $x$ , queda:

$$x = a \exp\left(\frac{n\pi}{\delta}\right) = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{n\pi}{\delta}\right) \quad (6.156)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  en el entorno del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\gamma} = a \tag{6.157}$$

$$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) \tag{6.158}$$

Por tanto:

$$L_k = \Delta x = x_1 - x_0 = \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \tag{6.159}$$

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	2.00
0.10	2.06
0.20	2.11
0.30	2.16
0.40	2.20
0.50	2.24
0.60	2.28
0.70	2.32
0.80	2.36
0.90	2.39
1.00	2.42
1.10	2.45
1.20	2.48
1.30	2.51
1.40	2.54
1.50	2.56
1.60	2.59
1.70	2.61
1.80	2.63
1.90	2.66
2.00	2.68

Cuadro 6.7: Coeficientes  $\beta_\gamma$  para la barra libre-empotrada de inercia variable

De nuevo vemos que la longitud de pandeo es variable y depende del grado de ahusamiento,  $\gamma$ , de la barra. En cuanto al coeficiente de esbeltez tenemos que:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (6.160)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \quad (6.161)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} \quad (6.162)$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_\gamma = 2 \quad (6.163)$$

Que es justamente el valor de  $\beta$  para una barra libre-empotrada de inercia constante, cuya longitud de pandeo es  $L_k = 2L$ .

En el Cuadro 6.7 se muestran los valores más frecuentes de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ .

### 6.2.2.2. Columna equivalente

El modelo de la columna equivalente se muestra en la Figura 6.10.

La ecuación de equivalencia es como ya sabemos:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (6.164)$$

Donde:

$$m = \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)} \right) + \ln^2(1+\gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \quad (6.165)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \quad (6.166)$$

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)}} \quad (6.167)$$

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = bI_a \quad (6.168)$$

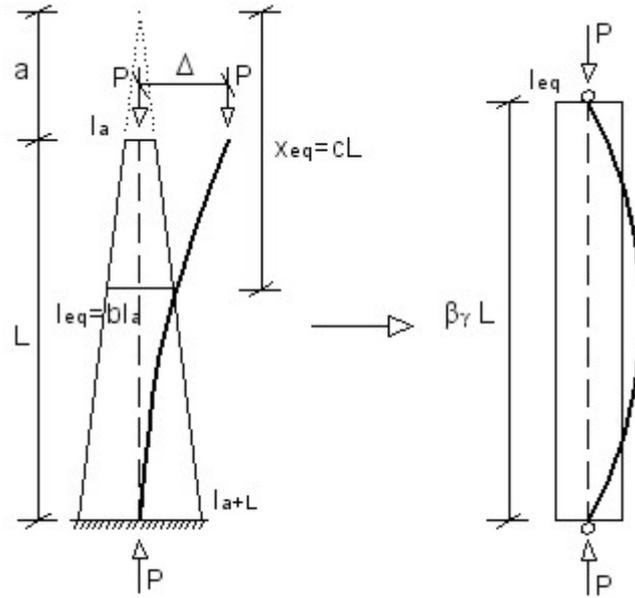


Figura 6.10: Columna equivalente para la barra libre-empotrada de inercia variable

$$b = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} \tag{6.169}$$

En el Cuadro 6.8 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable será:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \tag{6.170}$$

$$x_{eq} = cL \tag{6.171}$$

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2 \gamma^2}} \tag{6.172}$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \tag{6.173}$$

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.21
0.20	1.44
0.30	1.69
0.40	1.96
0.50	2.26
0.60	2.57
0.70	2.90
0.80	3.26
0.90	3.63
1.00	4.03
1.10	4.44
1.20	4.88
1.30	5.34
1.40	5.81
1.50	6.31
1.60	6.83
1.70	7.37
1.80	7.93
1.90	8.51
2.00	9.11

Cuadro 6.8: Valores de  $b$  para la barra libre-empotrada de inercia variable

## 6.3. Columna de inercia variable biempotrada

### 6.3.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.11. El equilibrio de momentos es:

$$\text{Momento externo: } M_{ext} = P \cdot v(x) - M_a - T \cdot (x - a)$$

$$\text{Momento interno: } M_{int} = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$$

Donde existe la siguiente relación:

$$T = \frac{M_{a+L} - M_a}{L} \quad (6.174)$$

Según esto, la ecuación de equilibrio es:

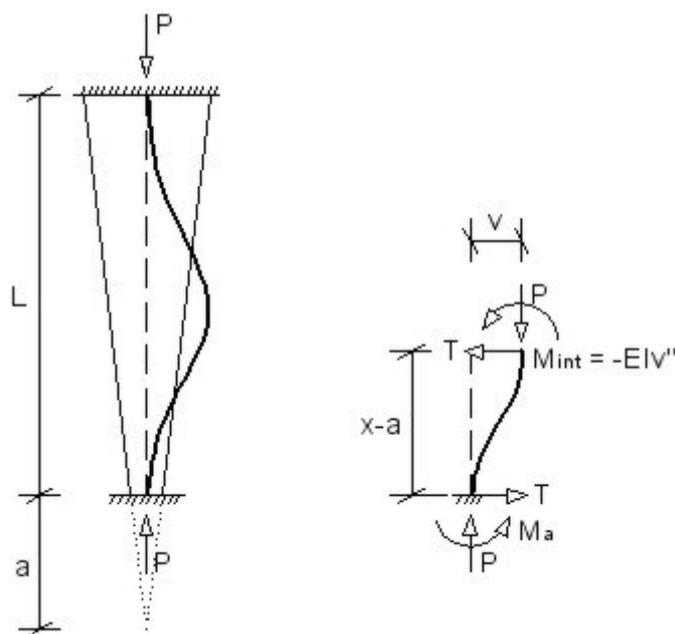


Figura 6.11: Barra biempotrada de inercia variable

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - M_a - T(x - a) = 0 \quad (6.175)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.176)$$

La ecuación queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - \frac{M_a k^2 a^2}{P} - \frac{T k^2 a^2}{P} (x - a) = 0 \quad (6.177)$$

Ecuación diferencial que tiene la siguiente solución general:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M_a}{P} + \frac{T(x - a)}{P} \quad (6.178)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.179)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (6.180)$$

$$v'(a) = 0 \quad (6.181)$$

$$v(a + L) = 0 \quad (6.182)$$

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.183)$$

Aplicando las dos primeras condiciones tenemos que:

$$B = -\frac{M_a}{P} \quad (6.184)$$

$$A = \frac{M_a - 2aT}{2\delta P} \quad (6.185)$$

Quedando la ecuación de la deformada:

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{M_a - 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M_a}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \\ & + \frac{M_a}{P} + \frac{T(x - a)}{P} \end{aligned} \quad (6.186)$$

### Carga de pandeo

Aplicaremos ahora las dos últimas condiciones de contorno. De (6.182) se obtiene:

$$v(a + L) = 0 \quad (6.187)$$

$$\begin{aligned} & 2\delta(M_a + LT) - 2\delta M \sqrt{1 + \gamma} \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) + \\ & + (M_a - 2aT) \sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \end{aligned} \quad (6.188)$$

Aplicando la condición (6.183):

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.189)$$

$$4a\delta T \sqrt{1 + \gamma} - 4a\delta T \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) +$$

$$+(M_a(4\delta^2 + 1) - 2aT) \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \quad (6.190)$$

Tenemos aquí un sistema de dos ecuaciones. Tomando como variables  $M_a$  y  $T$ , las condiciones para que el sistema tenga solución distinta de la trivial son:

$$\sin\left(\frac{\delta \ln(1 + \gamma)}{2}\right) = 0 \quad (6.191)$$

$$\left(\frac{\gamma(4\delta^2 - 1)}{4\delta}\right) \cos\left(\frac{\delta \ln(1 + \gamma)}{2}\right) - (\gamma + 2) \sin\left(\frac{\delta \ln(1 + \gamma)}{2}\right) = 0 \quad (6.192)$$

La primera ecuación nos proporcionará la *carga de pandeo simétrica*, y la segunda corresponde a la *carga de pandeo antisimétrica*. Es sabido que la carga de pandeo simétrica es menor que la antisimétrica, por lo que la barra pandeará siempre en modo simétrico. Por tanto, será esta vía la que analizaremos de aquí en adelante. Según esto:

$$\sin\left(\frac{\delta \ln(1 + \gamma)}{2}\right) = 0 \quad (6.193)$$

$$\frac{\delta \ln(1 + \gamma)}{2} = n\pi \quad (6.194)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

La carga de pandeo se obtiene para  $n = 1$ :

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.195)$$

Igualando esta expresión con la (6.179):

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.196)$$

Y despejando  $k$ , queda:

$$k = \sqrt{\frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.197)$$

Sabiendo que:

$\gamma$	$m$
0.00	$4\pi^2 \approx 39.48$
0.10	43.46
0.20	47.52
0.30	51.64
0.40	55.83
0.50	60.10
0.60	64.43
0.70	68.83
0.80	73.29
0.90	77.82
1.00	82.42
1.10	87.08
1.20	91.81
1.30	96.60
1.40	101.45
1.50	106.36
1.60	111.33
1.70	116.37
1.80	121.47
1.90	126.62
2.00	131.84

Cuadro 6.9: Factor  $m$  para la barra biempotrada de inercia variable

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \tag{6.198}$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \left[ \frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \tag{6.199}$$

Expresión que se ajusta a la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \tag{6.200}$$

Donde:

$$m = \frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \tag{6.201}$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante tenemos que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = 4\pi^2 \quad (6.202)$$

Por lo que la carga de pandeo quedaría:

$$P_p = \frac{4\pi^2 EI_a}{L^2} \quad (6.203)$$

Que es justamente la expresión de la carga de pandeo de Euler para una barra biempotrada de inercia constante. Queda por tanto confirmada la validez de la fórmula obtenida para la barra de inercia variable (6.199).

Para un cálculo práctico de la carga de pandeo, en el Cuadro 6.9 se han recogido los valores más frecuentes de  $m$  en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

### Deformada de la barra

La ecuación de la deformada es:

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{M_a - 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M_a}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \\ & + \frac{M_a}{P} + \frac{T(x-a)}{P} \end{aligned} \quad (6.204)$$

Donde:

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1+\gamma)} \quad (6.205)$$

Y sus derivadas:

$$\begin{aligned} v'(x) = & \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} [4a\delta T \sqrt{\frac{x}{a}} - 4a\delta T \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4P\delta x} + \\ & + \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} [(M_a(4\delta^2 + 1) - 2aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4P\delta x} \end{aligned} \quad (6.206)$$

$$v''(x) = \frac{(4\delta^2 + 1) [2\delta M_a \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - (M_a - 2aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2 P \delta \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} \quad (6.207)$$

$$v'''(x) = -\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} (4\delta^2 + 1) [4\delta(2M_a - aT) \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16P\delta x^3}$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(4\delta^2 + 1) [(M_a(4\delta^2 - 3) + 6aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16P\delta x^3} \quad (6.208)$$

La deformada es en este caso algo diferente a las tratadas anteriormente (Figura 6.12). El eje alrededor del cual oscila la curva no es horizontal, sino que tiene una cierta pendiente  $T/P$ , debido a la presencia del cortante  $T$  en los extremos de la barra. Concretamente, la ecuación de la recta que define dicho eje es:

$$r(x) = \frac{M_a - aT}{P} + \frac{T}{P}x \quad (6.209)$$

Con lo que la ordenada en el origen y, por tanto, el punto de partida de la curva es  $(M_a - aT)/P$ .

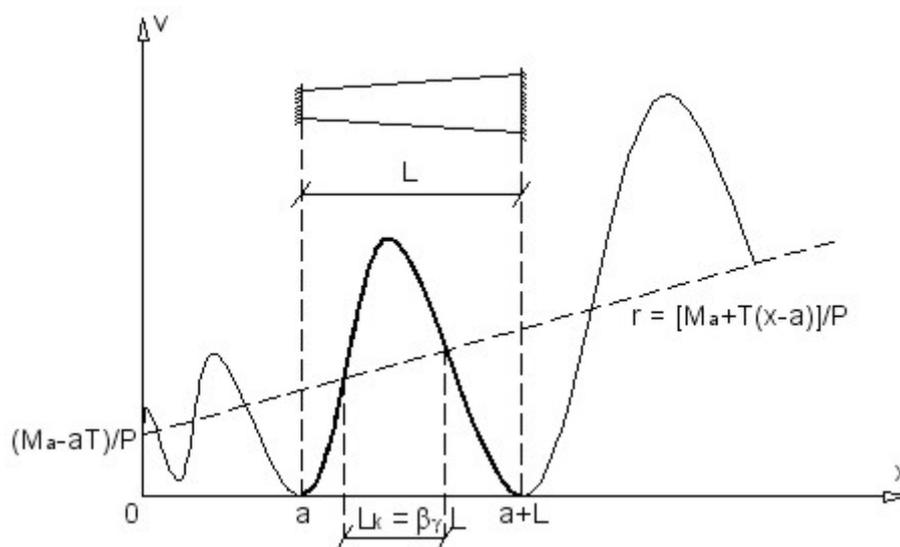


Figura 6.12: Deformada de la barra biempotrada de inercia variable

En cuanto a la flecha máxima, en este caso volvemos a comprobar que esta no se produce en el centro de la barra, sino que se encuentra algo desplazada hacia el extremo de menor inercia. Podemos conocer el punto concreto maximizando la función de la deformada:

$$v'(x) = 0 \quad (6.210)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} [4a\delta T \sqrt{\frac{x}{a}} - 4a\delta T \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4P\delta x} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} [(M_a(4\delta^2 + 1) - 2aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4P\delta x} = 0 \quad (6.211)$$

Y teniendo en cuenta que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , tenemos que:

$$4a\delta T \sqrt{\frac{x}{a}} - 4a\delta T \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + (M_a(4\delta^2 + 1) - 2aT) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.212)$$

Despejando la abscisa  $x$  de esta ecuación obtendríamos el punto donde la flecha es máxima. Sin embargo, despejar  $x$  es inviable analíticamente, siendo necesario recurrir al cálculo numérico. Por ello, lo más conveniente será calcular la flecha máxima y su posición numéricamente, una vez conocidos los parámetros necesarios.

### Momentos flectores en la barra

La ley de momentos flectores es en este caso:

$$M(x) = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = -\frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 (4\delta^2 + 1) [2\delta M_a \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2 P \delta \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} - \frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 (4\delta^2 + 1) [-(M_a - 2aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2 P \delta \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} \quad (6.213)$$

Si queremos conocer el momento máximo debemos aplicar la condición:

$$v'''(x) = 0 \quad (6.214)$$

Es decir:

$$-\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(4\delta^2 + 1) [4\delta(2M_a - aT) \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16P\delta x^3} - \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}(4\delta^2 + 1) [(M_a(4\delta^2 - 3) + 6aT) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16P\delta x^3} = 0 \quad (6.215)$$

Y teniendo en cuenta de nuevo las restricciones  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , tenemos que:

$$4\delta(2M_a - aT) \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + (M_a(4\delta^2 - 3) + 6aT) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.216)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = -\frac{4\delta(2M_a - aT)}{M_a(4\delta^2 - 3) + 6aT} \quad (6.217)$$

Si despejamos  $x$  se obtiene:

$$x_{m,\text{m}\acute{a}\text{x}} = a \exp\left[\frac{\pi + \arctan\left[-\frac{4\delta(2M_a - aT)}{M_a(4\delta^2 - 3) + 6aT}\right]}{\delta}\right] \quad (6.218)$$

Con:

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} = \frac{2\pi}{\ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)} \quad (6.219)$$

El momento máximo será:

$$M_{\text{m}\acute{a}\text{x}} = M(x_{m,\text{m}\acute{a}\text{x}}) \quad (6.220)$$

Podemos comprobar también que si la barra tiende a ser de inercia constante, el momento máximo se produce en  $x = a + L/2$ :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{m,\text{m}\acute{a}\text{x}} - a) = \frac{L}{2} \quad (6.221)$$

### Longitud de pandeo

Aplicando la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.222)$$

$$\frac{(4\delta^2 + 1) [2\delta M_a \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - (M_a - 2aT) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8a^2 P \delta \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} = 0 \quad (6.223)$$

Y como  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , entonces:

$$2\delta M_a \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - (M_a - 2aT) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.224)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = \frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT} \quad (6.225)$$

Si despejamos  $x$ , queda:

$$x = a \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right) + n\pi}{\delta}\right] = \frac{L}{\gamma} \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right) + n\pi}{\delta}\right] \quad (6.226)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  dentro del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\gamma} \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right)}{\delta}\right] \quad (6.227)$$

$$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{L}{\gamma} \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right) + \pi}{\delta}\right] \quad (6.228)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} L_k &= \Delta x = x_1 - x_0 = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right) + \pi}{\delta}\right] - \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right)}{\delta}\right] \right] = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[ \left(\exp \frac{\pi}{\delta} - 1\right) \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right)}{\delta}\right] \right] \end{aligned} \quad (6.229)$$

De nuevo tenemos que la longitud de pandeo es variable y dependiente del ahusamiento,  $\gamma$ , de la barra. En cuanto al coeficiente de esbeltez tenemos que:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (6.230)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[ \left(\exp \frac{\pi}{\delta} - 1\right) \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT}\right)}{\delta}\right] \right] \quad (6.231)$$

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	0.50
0.10	0.49
0.20	0.48
0.30	0.47
0.40	0.46
0.50	0.45
0.60	0.44
0.70	0.43
0.80	0.43
0.90	0.42
1.00	0.41
1.10	0.41
1.20	0.40
1.30	0.40
1.40	0.39
1.50	0.39
1.60	0.38
1.70	0.38
1.80	0.37
1.90	0.37
2.00	0.37

Cuadro 6.10: *Coefficientes  $\beta_\gamma$  para la barra biempotrada de inercia variable*

Donde:

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} \tag{6.232}$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_\gamma = \frac{1}{2} \tag{6.233}$$

Que es concretamente el valor de  $\beta$  para una barra biempotrada de inercia constante, cuya longitud de pandeo es  $L_k = L/2$ .

En el Cuadro 6.10 se muestran los valores más frecuentes de  $\beta_\gamma$  en función del ahusamiento,  $\gamma$ . Se puede observar como en este caso la variación del coeficiente de esbeltez es muy pequeña para diferentes valores de ahusamiento.

### 6.3.2. Columna equivalente

El modelo de la columna equivalente se muestra en la Figura 6.13.

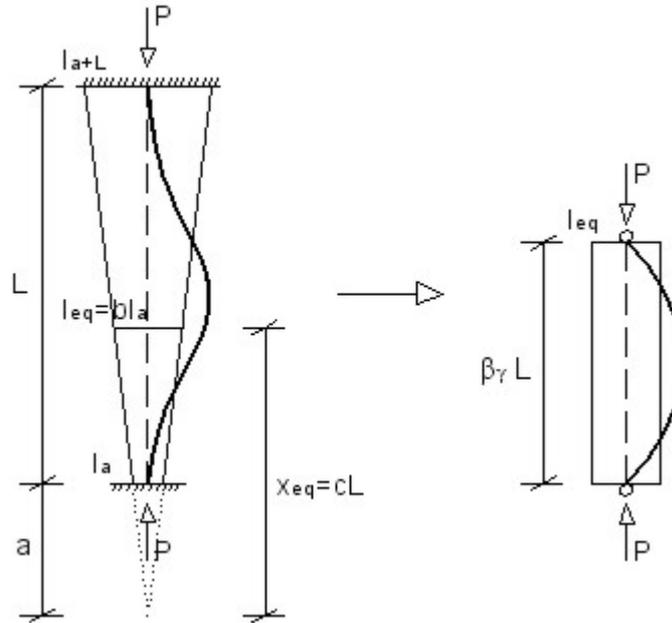


Figura 6.13: Columna equivalente para la barra biempotrada de inercia variable

La ecuación de equivalencia es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (6.234)$$

Donde:

$$m = \frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \quad (6.235)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta M_a}{M_a - 2aT} \right)}{\delta} \right] \right] \quad (6.236)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.237)$$

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.05
0.20	1.10
0.30	1.14
0.40	1.19
0.50	1.23
0.60	1.27
0.70	1.31
0.80	1.35
0.90	1.39
1.00	1.43
1.10	1.47
1.20	1.51
1.30	1.54
1.40	1.58
1.50	1.62
1.60	1.65
1.70	1.69
1.80	1.72
1.90	1.76
2.00	1.79

Cuadro 6.11: Valores de  $b$  para la barra biempotrada de inercia variable

$$I_{eq} = bI_a \tag{6.238}$$

$$b = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} \tag{6.239}$$

En el Cuadro 6.11 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable será:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \tag{6.240}$$

$$x_{eq} = cL \tag{6.241}$$

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2\gamma^2}} \quad (6.242)$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \quad (6.243)$$

## 6.4. Columna de inercia variable biempotrada con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus extremos

### 6.4.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.14. El equilibrio de momentos es:

$$\begin{aligned} \text{Momento externo: } M_{ext} &= P \cdot v(x) - M_a \\ \text{Momento interno: } M_{int} &= EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x) \end{aligned}$$

Según esto, la ecuación de equilibrio es:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - M_a = 0 \quad (6.244)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.245)$$

La ecuación queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - \frac{M_a k^2 a^2}{P} = 0 \quad (6.246)$$

Ecuación diferencial que tiene la siguiente solución general:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M_a}{P} \quad (6.247)$$

Donde:

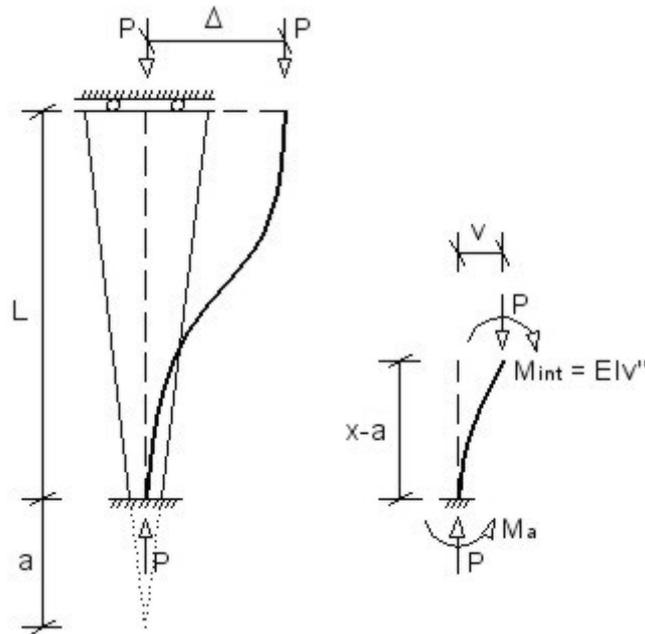


Figura 6.14: Barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.248)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , debemos aplicar las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (6.249)$$

$$v'(a) = 0 \quad (6.250)$$

$$v(a + L) = \Delta \quad (6.251)$$

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.252)$$

Aplicando las dos primeras condiciones tenemos que:

$$B = -\frac{M_a}{P} \quad (6.253)$$

$$A = \frac{M_a}{2\delta P} \quad (6.254)$$

Por lo que la ecuación de la deformada queda:

$$v(x) = \frac{M_a}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M_a}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M_a}{P} \quad (6.255)$$

### Carga de pandeo

Si aplicamos la última condición de contorno:

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.256)$$

Se obtiene:

$$\sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \quad (6.257)$$

$$\delta \ln(1 + \gamma) = n\pi \quad (6.258)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

La carga de pandeo se obtiene para  $n = 1$ :

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.259)$$

Igualando esta expresión con la (6.248):

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.260)$$

Y despejando  $k$ , tenemos que:

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.261)$$

Sabiendo que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.262)$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.263)$$

Expresión que es idéntica a la de la carga de pandeo para una barra biarticulada (6.19). Por ello podemos afirmar que *la carga de pandeo de una columna biempotrada con desplazamiento relativo entre extremos es igual a la carga de pandeo de una columna biarticulada, sea cual sea el grado de ahusamiento de la barra.*

$\gamma$	$m$
0.00	$\pi^2 \approx 9.87$
0.10	10.87
0.20	11.89
0.30	12.93
0.40	13.99
0.50	15.07
0.60	16.17
0.70	17.30
0.80	18.44
0.90	19.61
1.00	20.79
1.10	22.00
1.20	23.22
1.30	24.47
1.40	25.73
1.50	27.01
1.60	28.31
1.70	29.63
1.80	30.97
1.90	32.33
2.00	33.71

Cuadro 6.12: *Factor m para la barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos*

La fórmula (6.263) corresponde a la expresión general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (6.264)$$

Donde:

$$m = \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \quad (6.265)$$

Y si la barra tiende a ser de inercia constante:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = \pi^2 \quad (6.266)$$

Por lo que la carga de pande quedaría:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_a}{L^2} \quad (6.267)$$

Que es justamente la expresión de la carga de pandeo de Euler para una barra biempotrada con posibilidad de desplazamiento relativo entre sus extremos. Esto nos confirma la validez de la fórmula obtenida (6.263).

Para un cálculo práctico de la carga de pandeo, en el Cuadro 6.12 se han recogido los valores más frecuentes de  $m$  en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

### Deformada de la barra

La ecuación de la deformada es:

$$v(x) = \frac{M_a}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M_a}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M_a}{P} \quad (6.268)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.269)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4\delta P x} \quad (6.270)$$

$$v''(x) = \frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8\delta P x^2} \quad (6.271)$$

$$v'''(x) = \frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [8\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + (4\delta^2 - 3) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{16\delta P x^3} \quad (6.272)$$

La curva de la deformada en este caso tiene su ordenada origen en  $M_a/P$ , y el eje de oscilación de la curva es paralelo al eje de abscisas (Figura 6.15).

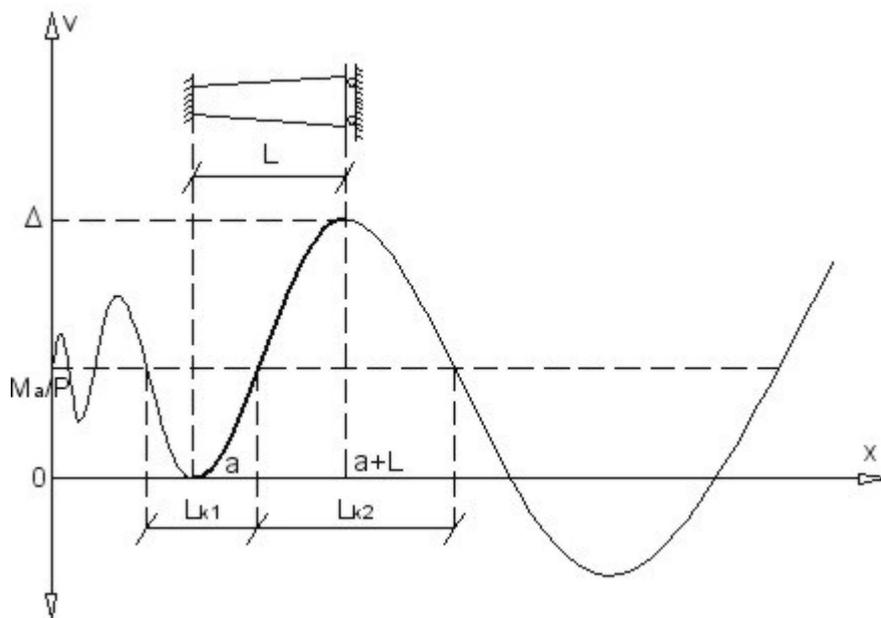


Figura 6.15: Deformada de la barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos

En cuanto a la flecha máxima, podemos hallar su posición y su valor maximizando la función de la deformada:

$$v'(x) = 0 \quad (6.273)$$

$$\frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4\delta P x} = 0 \quad (6.274)$$

Y teniendo en cuenta que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , tenemos que:

$$\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.275)$$

$$\delta \ln \frac{x}{a} = \pi \quad (6.276)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.277)$$

Podemos escribir:

$$\frac{\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln(1 + \gamma)} = \pi \quad (6.278)$$

$$\ln \frac{x}{a} = \ln(1 + \gamma) \quad (6.279)$$

$$\frac{x}{a} = 1 + \gamma = \frac{a + L}{a} \quad (6.280)$$

Despejando  $x$ , queda:

$$x_{f,\text{máx}} = a + L \quad (6.281)$$

Es decir, la flecha máxima se encuentra en  $x = a + L$ , sea cual sea el ahusamiento de la barra, como ya era evidente del análisis de la Figura 6.14.

El valor de la flecha máxima será:

$$v_{\text{máx}} = v(x_{\text{máx}}) = v(a + L) = \Delta \quad (6.282)$$

### Momentos flectores en la barra

La ley de momentos flectores en la barra es:

$$\begin{aligned} M(x) &= EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \\ &= \frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [2\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8\delta P x^2} \end{aligned} \quad (6.283)$$

Podemos conocer el momento máximo aplicando la condición:

$$v'''(x) = 0 \quad (6.284)$$

Es decir:

$$\frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [8\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) + (4\delta^2 - 3) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16\delta P x^3} = 0 \quad (6.285)$$

Y teniendo en cuenta que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ :

$$8\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + (4\delta^2 - 3) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.286)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = -\frac{8\delta}{4\delta^2 - 3} \quad (6.287)$$

Si despejamos  $x$  se obtiene:

$$x_{m,\text{máx}} = a \exp\left[\frac{\pi + \arctan\left(-\frac{8\delta}{4\delta^2 - 3}\right)}{\delta}\right] \quad (6.288)$$

Con:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} = \frac{\pi}{\ln(1 + \frac{L}{a})} \quad (6.289)$$

El momento máximo será por tanto:

$$M_{\text{máx}} = M(x_{m,\text{máx}}) \quad (6.290)$$

Podemos comprobar también que si la barra tiende a ser de inercia constante, el momento máximo se produce en ambos extremos empotrados de la barra,  $x = a$  y  $x = a + L$ . Para dicha comprobación recurrimos a la resolución del siguiente límite:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{m,\text{máx}} - a) = L \quad (6.291)$$

Esto nos demuestra que el momento máximo se produce en  $x = a + L$ , pero como al ser la barra de inercia constante, hay simetría, también tendremos el mismo momento máximo en el extremo  $x = a$ .

### Longitud de pandeo

Aplicando la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.292)$$

$$\frac{M_a \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8\delta P x^2} = 0 \quad (6.293)$$

Y como  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , entonces:

$$2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.294)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 2\delta \quad (6.295)$$

Si despejamos  $x$ , queda:

$$x = a \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + n\pi}{\delta}\right) = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + n\pi}{\delta}\right) \quad (6.296)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n+1$  en el entorno del intervalo  $x \in [a, a+L]$ . En este caso tenemos dos puntos de inflexión,  $x_{-1} = x(n = -1)$  y  $x_1 = x(n = 1)$ , fuera del intervalo real de la barra, aunque dentro del entorno de la misma; y existe un punto de inflexión,  $x_0 = x(n = 0)$  perteneciente al intervalo real. Esto hace que existan dos posibles longitudes de pandeo para la barra:

$$L_{k1} = \Delta x_1 = x_0 - x_{-1} = \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta - \pi}{\delta}\right) \right] \quad (6.297)$$

$$L_{k2} = \Delta x_2 = x_1 - x_0 = \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + \pi}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \quad (6.298)$$

Siendo:

$$L_{k2} \geq L_{k1} \forall \gamma \quad (6.299)$$

Por este motivo, en este caso debemos tomar como longitud de pandeo la media ponderada de ambas expresiones:

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{L_{k1}(x_0 - a) + L_{k2}((a + L) - x_0)}{L} = \frac{L_{k1}\left(x_0 - \frac{L}{\gamma}\right) + L_{k2}\left(\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)L - x_0\right)}{L} = \\ &= \frac{L}{\gamma^2} \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta - \pi}{\delta}\right) \right] \cdot \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) - 1 \right] + \\ &+ \frac{L}{\gamma^2} \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta + \pi}{\delta}\right) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \cdot \left[ (1 + \gamma) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] = \\ &= \frac{L}{\gamma^2} \left[ \left(1 - \exp\frac{-\pi}{\delta}\right) \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \cdot \left[ \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) - 1 \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{L}{\gamma^2} \left[ \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \cdot \left[ (1 + \gamma) - \exp\left(\frac{\arctan 2\delta}{\delta}\right) \right] \tag{6.300}$$

Este mismo resultado para la longitud de pandeo,  $L_k$ , se obtiene considerando que la barra está compuesta por dos barras ficticias tipo empotrada-libre, cuyos extremos empotrados son respectivamente  $x = a$  y  $x = a + L$ , y el extremo libre es el punto de inflexión real,  $x_0$ , para ambas barras. En ese caso tendríamos una longitud de pandeo para cada barra ficticia, que al ser sumadas, darían lugar a la expresión (6.300) obtenida anteriormente.

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	1.00
0.10	1.00
0.20	1.00
0.30	1.00
0.40	1.00
0.50	1.00
0.60	1.00
0.70	1.00
0.80	1.00
0.90	1.00
1.00	1.00
1.10	1.00
1.20	1.00
1.30	1.00
1.40	1.00
1.50	1.00
1.60	1.00
1.70	1.00
1.80	1.00
1.90	1.00
2.00	1.00

Cuadro 6.13: Coeficientes  $\beta_\gamma$  para la barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos

La longitud de pandeo será entonces:

$$L_k = \beta_\gamma L \tag{6.301}$$

$$\begin{aligned} \beta_\gamma = \beta(\gamma) = & \frac{1}{\gamma^2} \left[ \left( 1 - \exp \frac{-\pi}{\delta} \right) \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \cdot \left[ \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) - 1 \right] + \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left[ \left[ \exp \left( \frac{\pi}{\delta} \right) - 1 \right] \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \cdot \left[ (1 + \gamma) - \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.302)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.303)$$

En el Cuadro 6.13 se muestran los valores de  $\beta_\gamma$  en función del coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ , y se puede observar como independientemente de  $\gamma$ , el valor del coeficiente de esbeltez es siempre igual 1. Esto permite afirmar que *la longitud de pandeo de una columna biempotrada, con desplazamiento relativo entre extremos, es siempre igual a su propia longitud, independientemente del grado de ahusamiento de la barra*. Esto mismo ocurría en el caso de la barra biarticulada.

### 6.4.2. Columna equivalente

El modelo de la columna equivalente se muestra en la Figura 6.16.

La ecuación de equivalencia es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (6.304)$$

Donde:

$$m = \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \quad (6.305)$$

$$\begin{aligned} \beta_\gamma = & \frac{1}{\gamma^2} \left[ \left( 1 - \exp \frac{-\pi}{\delta} \right) \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \cdot \left[ \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) - 1 \right] + \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left[ \left[ \exp \left( \frac{\pi}{\delta} \right) - 1 \right] \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \cdot \left[ (1 + \gamma) - \exp \left( \frac{\arctan 2\delta}{\delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.306)$$

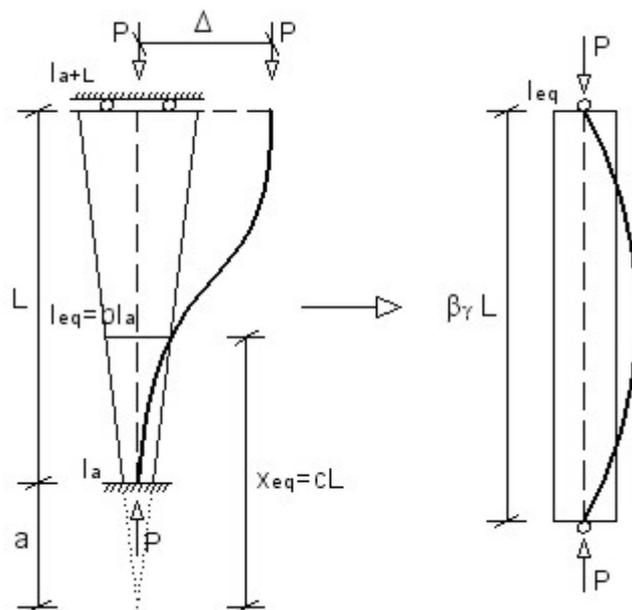


Figura 6.16: Columna equivalente para la barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \tag{6.307}$$

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = b I_a \tag{6.308}$$

$$b = \frac{m \beta_\gamma^2}{\pi^2} \tag{6.309}$$

En el Cuadro 6.14 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable será:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m \beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \tag{6.310}$$

$$x_{eq} = c L \tag{6.311}$$

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.10
0.20	1.20
0.30	1.31
0.40	1.42
0.50	1.53
0.60	1.64
0.70	1.75
0.80	1.87
0.90	1.99
1.00	2.11
1.10	2.23
1.20	2.35
1.30	2.48
1.40	2.61
1.50	2.74
1.60	2.87
1.70	3.00
1.80	3.14
1.90	3.28
2.00	3.41

Cuadro 6.14: Valores de  $b$  para la barra biempotrada de inercia variable con desplazamiento relativo entre extremos

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2\gamma^2}} \tag{6.312}$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \tag{6.313}$$

## 6.5. Columna de inercia variable empotrada en un extremo y articulada en el otro

### 6.5.1. Caso A: Empotrada-articulada

#### 6.5.1.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.17. El equilibrio de momentos es:

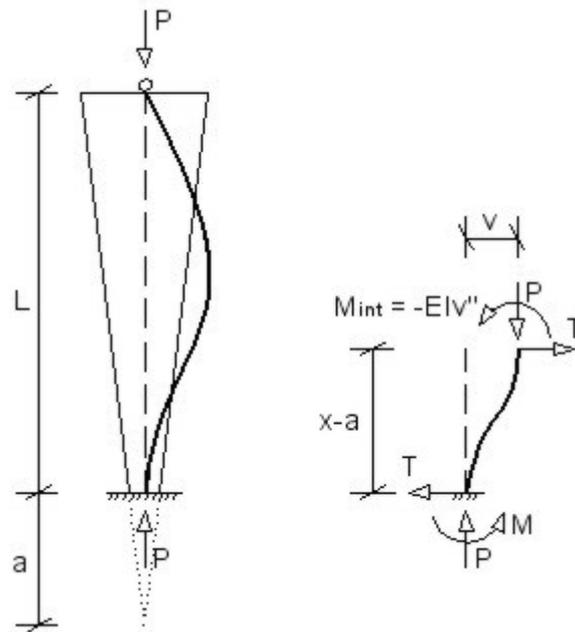


Figura 6.17: Barra empotrada-articulada de inercia variable

$$\text{Momento externo: } M_{ext} = P \cdot v(x) - M + T \cdot (x - a)$$

$$\text{Momento interno: } M_{int} = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$$

Donde:

$$T = \frac{M}{L} \tag{6.314}$$

Por tanto, la ecuación de equilibrio es:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - M + \frac{M}{L}(x - a) = 0 \tag{6.315}$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.316)$$

La ecuación queda finalmente:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - \frac{Mk^2 a^2}{P} + \frac{Mk^2 a^2}{LP}(x - a) = 0 \quad (6.317)$$

Euación diferencial cuya solución general es:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x-a)}{LP} \quad (6.318)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.319)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (6.320)$$

$$v'(a) = 0 \quad (6.321)$$

$$v(a+L) = 0 \quad (6.322)$$

$$v''(a+L) = 0 \quad (6.323)$$

Aplicando las dos primeras condiciones tenemos que:

$$B = -\frac{M}{P} \quad (6.324)$$

$$A = \frac{M + 2aT}{2\delta P} \quad (6.325)$$

Quedando la ecuación de la deformada:

$$v(x) = \frac{M + 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x-a)}{LP} \quad (6.326)$$

### Carga de pandeo

Aplicaremos ahora cualquiera de las dos últimas condiciones de contorno, por ejemplo la (6.322):

$$v(a + L) = 0 \quad (6.327)$$

Que implica:

$$-2\delta\gamma \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) + (2 + \gamma) \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) = 0 \quad (6.328)$$

Obteniéndose finalmente:

$$\tan(\delta \ln(1 + \gamma)) = \frac{2\delta\gamma}{2 + \gamma} \quad (6.329)$$

Ecuación trigonométrica implícita de la que despejar  $\delta$  analíticamente es difícil de manera exacta, al igual que veíamos en la ecuación (6.72) para la barra empotrada-libre. No obstante, se ha obtenido una expresión analítica aproximada mediante un ajuste de los resultados obtenidos por procedimientos numéricos:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.330)$$

Igualando esta expresión con la (6.319):

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) = \sqrt{\left( \frac{kL}{\gamma} \right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.331)$$

Y despejando  $k$ , queda:

$$k = \sqrt{\frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma) \right] \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.332)$$

Sabiendo que:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (6.333)$$

Podemos despejar la carga de pandeo de la barra:

$$P_p = \left[ \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.334)$$

$\gamma$	$m$
0.00	20.19
0.10	22.23
0.20	24.30
0.30	26.41
0.40	28.55
0.50	30.72
0.60	32.93
0.70	35.18
0.80	37.46
0.90	39.77
1.00	42.11
1.10	44.48
1.20	46.89
1.30	49.33
1.40	51.80
1.50	54.30
1.60	56.83
1.70	59.40
1.80	61.99
1.90	64.61
2.00	67.26

Cuadro 6.15: Factor  $m$  para la barra empotrada-articulada de inercia variable

Expresión que se ajusta a la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \tag{6.335}$$

Donde:

$$m = \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \tag{6.336}$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} m = 20,19 \tag{6.337}$$

Por lo que la carga de pandeo quedaría:

$$P_p = \frac{20,19EI_a}{L^2} \tag{6.338}$$

Que es precisamente la expresión de la carga de pandeo de Euler para una barra empotrada-articulada de inercia constante. Queda así confirmada la validez de de la fórmula obtenida para la barra de inercia variable (6.334).

En el Cuadro 6.15 se recogen los valores más frecuentes de  $m$  en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

### Deformada de la barra

La ecuación de la deformada es:

$$v(x) = \frac{M + 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x-a)}{LP} \quad (6.339)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.340)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} [-4a\delta \sqrt{\frac{x}{a}} + 4a\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4\delta LPx} + \frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} [(2a + L + 4L\delta^2) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{4\delta LPx} \quad (6.341)$$

$$v''(x) = \frac{M(1 + 4\delta^2) [2L\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a}) - (2a + L) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2\delta LP \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} \quad (6.342)$$

$$v'''(x) = -\frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [4\delta(2L + a) \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16\delta LPx^3} - \frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [(L(4\delta^2 - 3) - 6a) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16\delta LPx^3} \quad (6.343)$$

La ecuación de la deformada (Figura 6.18) en este caso oscila alrededor de un eje con pendiente negativa  $-T/P$ , debido a la presencia del cortante  $T$ . Concretamente, la ecuación de la recta que define dicho eje es:

$$r(x) = \frac{M + aT}{P} - \frac{T}{P}x \quad (6.344)$$

Con lo que la ordenada en el origen y, por tanto, el punto de partida de la curva es  $(M + aT)/P$ .

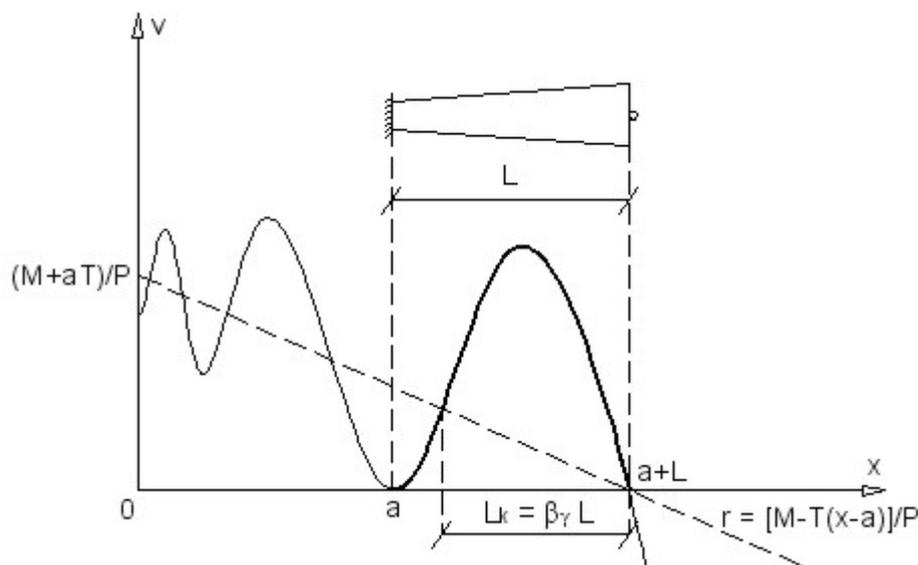


Figura 6.18: Deformada de la barra empotrada-articulada de inercia variable

En cuanto a la flecha máxima, podemos localizarla maximizando la función de la deformada:

$$v'(x) = 0 \tag{6.345}$$

$$\frac{M\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ -4a\delta\sqrt{\frac{x}{a}} + 4a\delta \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) \right]}{4\delta LPx} + \frac{M\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ (2a + L + 4L\delta^2) \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) \right]}{4\delta LPx} = 0 \tag{6.346}$$

Y teniendo en cuenta que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} & -4a\delta\sqrt{\frac{x}{a}} + 4a\delta \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + \\ & + (2a + L + 4L\delta^2) \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) = 0 \end{aligned} \tag{6.347}$$

Despejando la abscisa  $x$  de esta ecuación obtendríamos el punto donde la flecha es máxima. Sin embargo, despejar  $x$  es inviable analíticamente, siendo necesario recurrir al cálculo numérico.

**Momentos flectores en la barra**

La ley de momentos flectores es:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \\
 &= -\frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 (1 + 4\delta^2) [2L\delta \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2 \delta P \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} - \\
 &\quad -\frac{EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 (1 + 4\delta^2) [-(2a + L) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{8a^2 \delta P \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} \quad (6.348)
 \end{aligned}$$

Si queremos conocer el momento máximo debemos aplicar la condición:

$$v'''(x) = 0 \quad (6.349)$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [4\delta(2L + a) \cos(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16\delta L P x^3} - \\
 &-\frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} (1 + 4\delta^2) [(L(4\delta^2 - 3) - 6a) \sin(\delta \ln \frac{x}{a})]}{16\delta L P x^3} = 0 \quad (6.350)
 \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta de nuevo que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 &4\delta(2L + a) \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \\
 &+(L(4\delta^2 - 3) - 6a) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.351)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) &= -\frac{4\delta(2L + a)}{L(4\delta^2 - 3) - 6a} = \\
 &= -\frac{4\delta(2\gamma + 1)}{\gamma(4\delta^2 - 3) - 6} \quad (6.352)
 \end{aligned}$$

Si despejamos  $x$  se obtiene:

$$x_{m,\text{máx}} = a \exp \left[ \frac{\pi + \arctan \left[ -\frac{4\delta(2\gamma+1)}{\gamma(4\delta^2-3)-6} \right]}{\delta} \right] \quad (6.353)$$

Con:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) = \frac{\pi}{\ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)} \left( \frac{14311 - 38\frac{L}{a}}{10000} \right) \quad (6.354)$$

El momento máximo será por tanto:

$$M_{\text{máx}} = M(x_{m,\text{máx}}) \quad (6.355)$$

Podemos comprobar también que si la barra tiende a ser de inercia constante, el momento máximo se produce en  $x = 0,65L$ , como describe la bibliografía:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{m,\text{máx}} - a) = 0,65L \quad (6.356)$$

### Longitud de pandeo

Aplicando la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.357)$$

$$\frac{M(1 + 4\delta^2) [2L\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - (2a + L) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8a^2\delta LP \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} = 0 \quad (6.358)$$

Y como  $a \neq 0$  y  $x \neq 0$ , entonces:

$$2L\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - (2a + L) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.359)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = \frac{2L\delta}{2a + L} = \frac{2\delta\gamma}{2 + \gamma} \quad (6.360)$$

Si despejamos  $x$ , queda:

$$x = a \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta\gamma}{2+\gamma}\right) + n\pi}{\delta}\right] = \frac{L}{\gamma} \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2\delta\gamma}{2+\gamma}\right) + n\pi}{\delta}\right] \quad (6.361)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  dentro del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right)}{\delta} \right] \quad (6.362)$$

$$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right) + \pi}{\delta} \right] \quad (6.363)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} L_k &= \Delta x = x_1 - x_0 = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[ \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right) + \pi}{\delta} \right] - \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right)}{\delta} \right] \right] = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right)}{\delta} \right] \end{aligned} \quad (6.364)$$

En cuanto al coeficiente de esbeltez:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (6.365)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right)}{\delta} \right] \quad (6.366)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.367)$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, tenemos que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_\gamma = 0,7 \quad (6.368)$$

Que es concretamente el valor de  $\beta$  para una barra empotrada-articulada de inercia constante, cuya longitud de pandeo es  $L_k = 0,7L$ .

En el Cuadro 6.16 se muestran los valores más frecuentes de  $\beta_\gamma$  en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	0.70
0.10	0.71
0.20	0.72
0.30	0.73
0.40	0.73
0.50	0.74
0.60	0.75
0.70	0.75
0.80	0.76
0.90	0.76
1.00	0.77
1.10	0.77
1.20	0.78
1.30	0.78
1.40	0.79
1.50	0.79
1.60	0.79
1.70	0.80
1.80	0.80
1.90	0.80
2.00	0.81

Cuadro 6.16: *Coefficientes  $\beta_\gamma$  para la barra empotrada-articulada de inercia variable*

**6.5.1.2. Columna equivalente**

El modelo de la columna equivalente se muestra en la Figura 6.19.

La ecuación de equivalencia es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \tag{6.369}$$

Donde:

$$m = \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \tag{6.370}$$

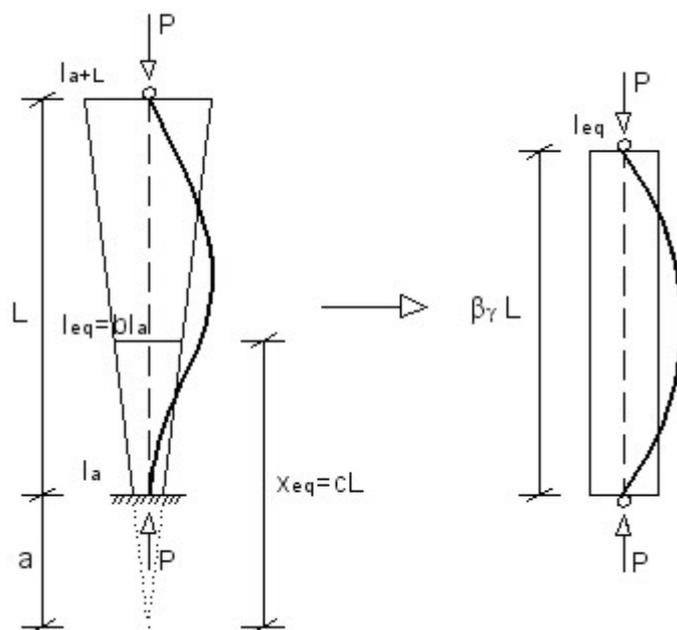


Figura 6.19: Columna equivalente para la barra empotrada-articulada de inercia variable

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{\arctan \left( \frac{2\delta\gamma}{2+\gamma} \right)}{\delta} \right] \quad (6.371)$$

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.372)$$

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = bI_a \quad (6.373)$$

$$b = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} \quad (6.374)$$

En el Cuadro 6.17 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los diferentes valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable será:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \quad (6.375)$$

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.10
0.20	1.27
0.30	1.41
0.40	1.56
0.50	1.71
0.60	1.86
0.70	2.02
0.80	2.19
0.90	2.35
1.00	2.52
1.10	2.70
1.20	2.88
1.30	3.06
1.40	3.25
1.50	3.44
1.60	3.63
1.70	3.83
1.80	4.03
1.90	4.23
2.00	4.43

Cuadro 6.17: Valores de  $b$  para la barra empotrada-articulada de inercia variable

$$x_{eq} = cL \tag{6.376}$$

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2\gamma^2}} \tag{6.377}$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \tag{6.378}$$

### 6.5.2. Caso B: Articulada-empotrada

#### 6.5.2.1. Análisis estático

El esquema de análisis se muestra en la Figura 6.20. Este es similar al Caso A, con la única diferencia de que la barra está invertida, por lo que las condiciones de contorno también lo están.

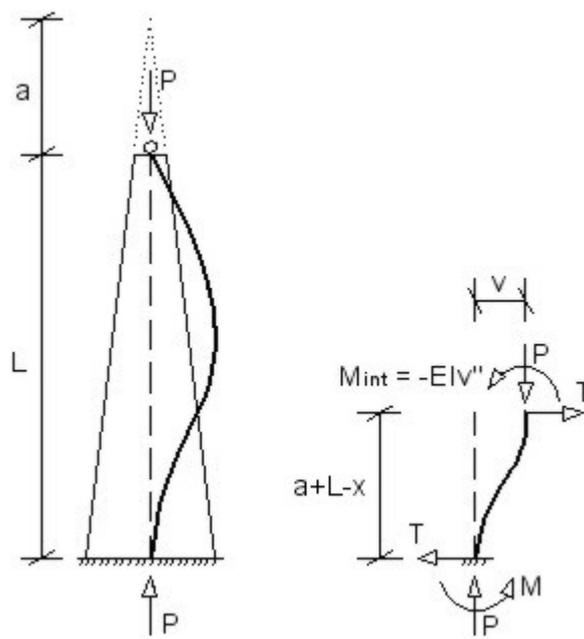


Figura 6.20: Barra articulada-empotrada de inercia variable

La ecuación general de la deformda es en este caso:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(a+L-x)}{LP} \quad (6.379)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.380)$$

$$T = \frac{M}{L} \quad (6.381)$$

Las condiciones de contorno son en este caso:

$$v(a) = 0 \quad (6.382)$$

$$v''(a) = 0 \quad (6.383)$$

$$v(a + L) = 0 \quad (6.384)$$

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.385)$$

La segunda condición es redundante respecto de la primera. Aplicando la primera y la tercera condición se obtienen las constantes de integración:

$$B = 0 \quad (6.386)$$

$$A = -\frac{M}{P\sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \quad (6.387)$$

### Carga de pandeo

Aplicaremos ahora la última condición de contorno (6.385):

$$v'(a + L) = 0 \quad (6.388)$$

$$\frac{M \left[ 2a + L - \frac{2L\delta}{\tan(\delta \ln(1 + \gamma))} \right]}{2LP(a + L)} = 0 \quad (6.389)$$

De donde se obtiene la ecuación:

$$\tan(\delta \ln(1 + \gamma)) = \frac{2\delta\gamma}{2 + \gamma} \quad (6.390)$$

Ecuación trigonométrica idéntica a la que se obtuvo en el Caso A (empotrada-articulada) (6.329). Esto permite afirmar que *la carga de pandeo de una barra articulada-empotrada de inercia de variable es igual a la carga de pandeo de una barra empotrada-articulada*, es decir, la posición relativa de los extremos no influye en la resistencia a pandeo. Aunque al principio pueda no esperarse que las cargas de pandeo sean iguales para el Caso A y el caso invertido, B, las características de contorno implican, desde el punto de vista matemático, una simetría de las soluciones para el problema. Una interpretación física de la simetría de cargas de pandeo puede ser que la presencia de la articulación en uno de los extremos amortigua en cierta forma la curva deformada,  $v(x)$ ,

de tal manera que aunque invirtamos los extremos de la barra, la deformada se adapta a cada condición de trabajo, permitiendo más o menos giro en la articulación según el momento de empotramiento en el extremo opuesto. Esto hace que la resistencia al pandeo, referida a la carga de pandeo, sea igual en los Casos A y B. Sin embargo, veremos más adelante como la longitud de pandeo y el momento de inercia equivalente sí que difieren en uno y otro caso.

$\gamma$	$m$
0.00	20.19
0.10	22.23
0.20	24.30
0.30	26.41
0.40	28.55
0.50	30.72
0.60	32.93
0.70	35.18
0.80	37.46
0.90	39.77
1.00	42.11
1.10	44.48
1.20	46.89
1.30	49.33
1.40	51.80
1.50	54.30
1.60	56.83
1.70	59.40
1.80	61.99
1.90	64.61
2.00	67.26

Cuadro 6.18: *Factor m para la barra articulada-empotrada de inercia variable*

Siguiendo el mismo procedimiento que en el Caso A, tenemos que:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \tag{6.391}$$

Y la carga de pandeo es:

$$P_p = \left[ \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1+\gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (6.392)$$

Con:

$$m = \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1+\gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \quad (6.393)$$

En el Cuadro 6.18 se muestran los valores más frecuentes de  $m$  en función de  $\gamma$ .

### Deformada de la barra

La ecuación de la deformada es:

$$v(x) = -\frac{M}{P\sqrt{1+\gamma} \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(a+L-x)}{LP} \quad (6.394)$$

Donde:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right) \quad (6.395)$$

Y sus derivadas:

$$v'(x) = \frac{M\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ -2L\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + 2a\sqrt{1+\gamma} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) \right]}{2LP\sqrt{1+\gamma} x \sin(\delta \ln(1+\gamma))} + \frac{M\sqrt{\frac{x}{a}} \left[ -L \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) \right]}{2LP\sqrt{1+\gamma} x \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \quad (6.396)$$

$$v''(x) = \frac{M(4\delta^2 + 1) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4a^2 P \sqrt{1+\gamma} \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \quad (6.397)$$

$$v'''(x) = \frac{M\sqrt{\frac{x}{a}}(4\delta^2 + 1) \left[ 2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - 3 \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) \right]}{8P\sqrt{1+\gamma} x^3 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \quad (6.398)$$

La ecuación de la deformada (Figura 6.21) en este caso oscila alrededor de un eje de pendiente positiva  $T/P$ . Concretamente, la ecuación de la recta que define dicho eje es:

$$r(x) = \frac{M - (a + L)T}{P} + \frac{T}{P}x \quad (6.399)$$

Con lo que la ordenada en el origen y, por tanto, el punto de partida de la curva es  $[M - (a + L)T]/P$ .

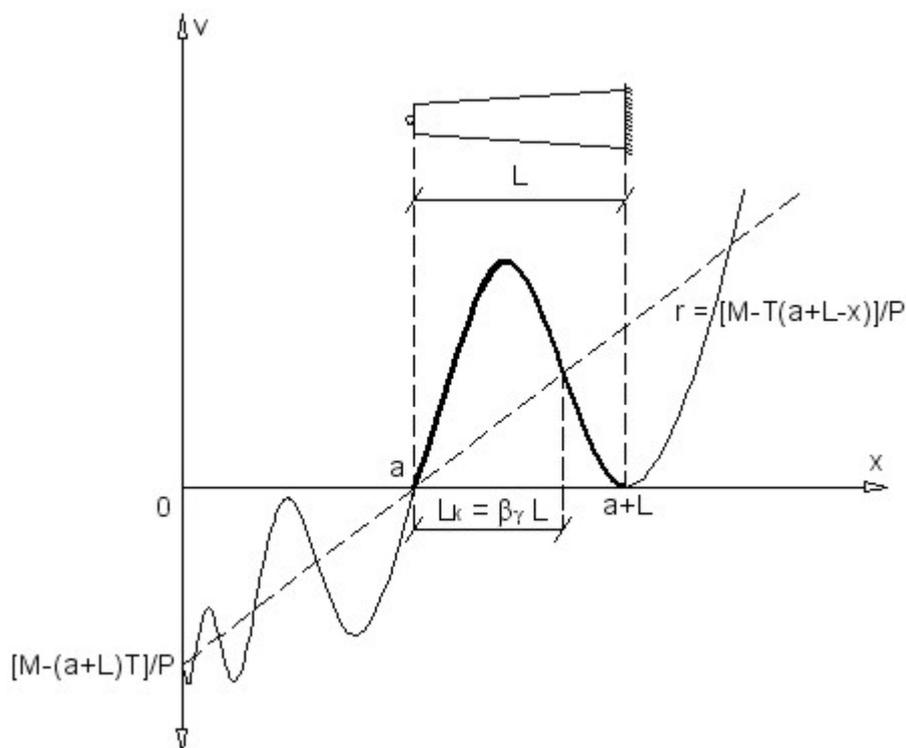


Figura 6.21: *Deformada de la barra articulada-empotrada de inercia variable*

Para conocer la posición de la flecha máxima y su posición, debemos aplicar la condición:

$$v'(x) = 0 \quad (6.400)$$

Obteniéndose la ecuación:

$$-2L\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + 2a\sqrt{1+\gamma} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) - L \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.401)$$

Despejando  $x$  numéricamente obtendremos la abcisa de la flecha máxima.

**Momentos flectores en la barra**

La ley de momentos flectores es:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) = \\
 &= \frac{-EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 M(4\delta^2 + 1) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4a^2 P \sqrt{1 + \gamma} \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \quad (6.402)
 \end{aligned}$$

Si queremos conocer el momento máximo, debemos aplicar la condición:

$$v'''(x) = 0 \quad (6.403)$$

Es decir:

$$\frac{M \sqrt{\frac{x}{a}} (4\delta^2 + 1) [2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - 3 \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)]}{8P \sqrt{1 + \gamma} x^3 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} = 0 \quad (6.404)$$

Y teniendo en cuenta que  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ :

$$2\delta \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - 3 \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.405)$$

$$\tan\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = \frac{2}{3}\delta \quad (6.406)$$

Si despejamos  $x$  se obtiene:

$$x_{m,\text{máx}} = a \exp\left[\frac{\arctan\left(\frac{2}{3}\delta\right)}{\delta}\right] \quad (6.407)$$

Con:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left(\frac{14311 - 38\gamma}{10000}\right) = \frac{\pi}{\ln\left(1 + \frac{L}{a}\right)} \left(\frac{14311 - 38\frac{L}{a}}{10000}\right) \quad (6.408)$$

El momento máximo será por tanto:

$$M_{\text{máx}} = M(x_{m,\text{máx}}) \quad (6.409)$$

Podemos comprobar que si la barra tiende a ser de inercia constante, el momento máximo se produce en  $x = 0,35L$ , como era de esperar:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (x_{m,\text{máx}} - a) = 0,35L \quad (6.410)$$

### Longitud de pandeo

Aplicando la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (6.411)$$

Tenemos que:

$$\frac{M(4\delta^2 + 1) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{4a^2 P \sqrt{1 + \gamma} \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} = 0 \quad (6.412)$$

Y como  $x \neq 0$  y  $a \neq 0$ , entonces:

$$\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) = 0 \quad (6.413)$$

$$\delta \ln \frac{x}{a} = n\pi \quad (6.414)$$

Si despejamos  $x$ , queda:

$$x = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{n\pi}{\delta}\right) \quad (6.415)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  dentro del intervalo  $x \in [a, a + L]$ , siendo en este caso  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\gamma} \quad (6.416)$$

$$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{L}{\gamma} \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) \quad (6.417)$$

Por tanto:

$$L_k = \Delta x = x_1 - x_0 = \frac{L}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \quad (6.418)$$

En cuanto al coeficiente de esbeltez:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (6.419)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \quad (6.420)$$

Donde:

$\gamma$	$\beta_\gamma$
0.00	0.70
0.10	0.69
0.20	0.68
0.30	0.67
0.40	0.66
0.50	0.66
0.60	0.65
0.70	0.64
0.80	0.64
0.90	0.63
1.00	0.62
1.10	0.62
1.20	0.61
1.30	0.61
1.40	0.61
1.50	0.60
1.60	0.60
1.70	0.60
1.80	0.59
1.90	0.58
2.00	0.58

Cuadro 6.19: *Coefficientes  $\beta_\gamma$  para la barra articulada-empotrada de inercia variable*

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \tag{6.421}$$

Si la barra tiende a ser de inercia constante, tenemos que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_\gamma = 0,7 \tag{6.422}$$

Que es justamente el valor de  $\beta$  para una barra articulada-empotrada de inercia constante, cuya longitud de pandeo es  $L_k = 0,7L$ .

En el Cuadro 6.19 se muestran los valores más frecuentes de  $\beta_\gamma$  en función del grado de ahusamiento,  $\gamma$ .

6.5.2.2. Columna equivalente

El modelo de la columna equivalente se muestra en la Figura 6.22.

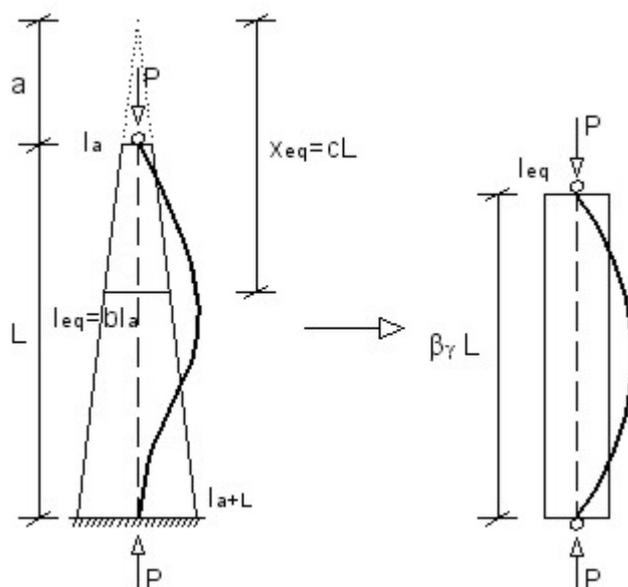


Figura 6.22: Columna equivalente para la barra articulada-empotrada de inercia variable

La ecuación de equivalencia es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \tag{6.423}$$

Donde:

$$m = \frac{\left[ 4\pi^2 \left( \frac{14311-38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma) \right] \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \tag{6.424}$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma} \left[ \exp\left(\frac{\pi}{\delta}\right) - 1 \right] \tag{6.425}$$

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \tag{6.426}$$

Con lo que el momento de inercia equivalente es:

$\gamma$	$b$
0.00	1.00
0.10	1.07
0.20	1.14
0.30	1.21
0.40	1.27
0.50	1.34
0.60	1.41
0.70	1.47
0.80	1.54
0.90	1.60
1.00	1.67
1.10	1.73
1.20	1.80
1.30	1.87
1.40	1.92
1.50	1.99
1.60	2.05
1.70	2.12
1.80	2.18
1.90	2.24
2.00	2.31

Cuadro 6.20: Valores de  $b$  para la barra articulada-empotrada de inercia variable

$$I_{eq} = bI_a \tag{6.427}$$

$$b = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} \tag{6.428}$$

En el Cuadro 6.20 se muestran los valores más frecuentes de  $b$  para los distintos valores de ahusamiento,  $\gamma$ .

La localización de  $I_{eq}$  a lo largo de la barra de inercia variable vendrá dada por:

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 = \frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2} I_a \tag{6.429}$$

$$x_{eq} = cL \quad (6.430)$$

$$c = \sqrt{\frac{m\beta_\gamma^2}{\pi^2\gamma^2}} \quad (6.431)$$

La esbeltez mecánica equivalente será:

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} \quad (6.432)$$

# Capítulo 7

## Columna con extremos elásticos

En este capítulo analizaremos de nuevo el pandeo por flexión en columnas de inercia variable en condiciones ideales, pero en esta ocasión las restricciones en sus extremos no estarán definidas al igual que veíamos en el capítulo 6, donde reproducíamos los cinco casos de Euler. En este caso, la columna a estudiar se supondrá formando parte de una estructura más compleja, de tal manera que los extremos de dicha columna se comporten como un nudo rígido de conexión con otras barras de la red estructural.

Para llevar a cabo un estudio de este tipo, tendremos que recurrir al análisis de una columna sometida a ciertos momentos flectores en sus extremos, los cuales dependerán de la carga axial actuante y de las rigideces frente al giro de los nudos extremos, que dependerán a su vez de las características resistentes de las barras que concurren en dichos nudos. La metodología a emplear será similar a la mostrada en el capítulo 2, sección 2.1.1.7, pero en este caso la barra será de inercia variable. En las secciones sucesivas de este capítulo se mostrará en orden lógico el proceso de análisis.

### 7.1. Columna de inercia variable con restricciones elásticas en los extremos

En esta sección analizaremos una hipotética barra que al encontrarse en el seno de una red estructural, tiene sus extremos bajo unas ciertas condiciones elásticas dependientes de las características del sistema estructural al que dicha barra pertenece.

En la sección 7.2 nos encargaremos de definir y modelizar esas restricciones elásticas que caracterizan los nudos extremos de la barra, una vez conocida la tipología de estructura en la que se encuentra dicha barra.

**7.1.1. Caso A: Sin desplazamiento lateral relativo entre extremos (Intraslacional)**

El esquema de análisis elegido será el de doble curvatura, el cual se muestra en la Figura 7.1. Los resultados obtenidos serán válidos para el caso de simple curvatura sin más que cambiar el signo a uno de los momentos extremos.

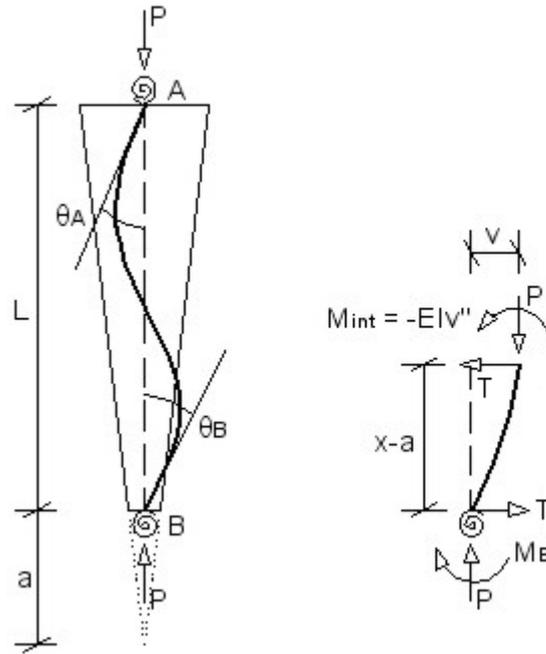


Figura 7.1: *Columna de inercia variable con extremos elásticos sometida a carga axial (Caso A)*

Los momentos interno y externo son:

Momento externo:  $M_{ext}(x) = P \cdot v(x) - T \cdot (x - a) + M_B$   
 Momento interno:  $M_{int}(x) = -EI(x) \cdot v''(x) = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$

Donde:

$$T = \frac{M_A + M_B}{L} \tag{7.1}$$

Igualando ambos momentos se llega a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) - \frac{M_A + M_B}{L}(x - a) + M_B = 0 \quad (7.2)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (7.3)$$

La ecuación de equilibrio queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) - \frac{(M_A + M_B)a^2}{LEI_a}(x - a) + \frac{M_B a^2}{EI_a} = 0 \quad (7.4)$$

Cuya solución general es:

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M_A + M_B}{LEI_a k^2}(x - a) - \frac{M_B}{EI_a k^2} \quad (7.5)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.6)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , debemos aplicar las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (7.7)$$

$$v(a + L) = 0 \quad (7.8)$$

$$v'(a) = \theta_B = \frac{M_B}{R_{kB}} \quad (7.9)$$

$$v'(a + L) = \theta_A = \frac{M_A}{R_{kA}} \quad (7.10)$$

Donde  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$  son las constantes elásticas o rigideces de los nudos  $A$  y  $B$  respectivamente.

Aplicando las dos primeras se obtiene:

$$A = -\frac{\sqrt{1 + \gamma} M_B \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) + M_A}{\sqrt{1 + \gamma} EI_a k^2 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \quad (7.11)$$

$$B = \frac{M_B}{EI_a k^2} \quad (7.12)$$

### Carga de pandeo

Aplicando las dos últimas condiciones de contorno conjuntamente, se podría hallar la carga de pandeo para la barra en función de las rigideces de los nudos,  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ . No obstante, para determinar dichas rigideces es necesario conocer las características geométricas y elásticas de las barras que concurren en cada uno de los nudos, tema del que nos ocuparemos en la sección 7.2.

En esa sección también podremos comprobar que se puede conocer la carga de pandeo por medio del planteamiento del equilibrio en los nudos, sin conocer la deformada de la barra que aquí hemos calculado.

### Longitud de pandeo

Para conocer la longitud de pandeo aplicamos la condición de inflexión:

$$v''(x) = 0 \quad (7.13)$$

Llegándose a la siguiente relación:

$$\frac{\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\delta \left(\ln(1+\gamma) - \ln \frac{x}{a}\right)\right)} = \sqrt{1+\gamma} \frac{M_B}{M_A} = \sqrt{1+\gamma} \frac{R_{kB}\theta_B}{R_{kA}\theta_A} \quad (7.14)$$

Para despejar  $x$  y hallar la longitud de pandeo, es necesario de nuevo conocer los valores de  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ . En la sección 7.2, como ya se ha comentado, daremos respuesta a estas incógnitas y podremos conocer los valores de la longitud de pandeo en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

#### 7.1.1.1. Ecuaciones pendiente-desplazamiento. Funciones de estabilidad

Buscaremos ahora las ecuaciones pendiente-desplazamiento para la barra en estudio, las cuales nos serán de utilidad para el análisis en la sección 7.2.

Partimos de la ecuación de la deformada (7.5), y reagrupamos sacando factor común  $M_A$  y  $M_B$ :

$$v(x) = \frac{M_B}{EI_a k^2} \left[ \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} \cos(\delta \ln(1+\gamma)) \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{\sin(\delta \ln(1+\gamma))} + \frac{x-a}{L} - 1 \right] +$$

$$+\frac{M_A}{EI_a k^2} \left[ -\frac{\sqrt{\frac{x}{a}} \sin(\delta \ln \frac{x}{a})}{\sqrt{1+\gamma} \sin(\delta \ln(1+\gamma))} + \frac{x-a}{L} \right] \quad (7.15)$$

Si derivamos esta ecuación y particularizamos para los extremos  $x = a$  y  $x = a + L$ , obtenemos las expresiones de los giros en dichos extremos:

$$\begin{aligned} \theta_B = v'(a) = \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\frac{2+\gamma}{2} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \gamma \delta \cos(\delta \ln(1+\gamma))}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] M_B + \\ + \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \gamma \delta \sqrt{\frac{1}{\gamma+1}}}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] M_A \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \theta_A = v'(a+L) = \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \gamma \delta \sqrt{\frac{1}{\gamma+1}}}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] M_B + \\ + \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\frac{2+\gamma}{2+2\gamma} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \frac{\gamma}{1+\gamma} \delta \cos(\delta \ln(1+\gamma))}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] M_A \end{aligned} \quad (7.17)$$

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AA} & f_{AB} \\ f_{BA} & f_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Donde:

$$f_{AA} = \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\frac{2+\gamma}{2+2\gamma} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \frac{\gamma}{1+\gamma} \delta \cos(\delta \ln(1+\gamma))}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] \quad (7.19)$$

$$f_{AB} = f_{BA} = \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \gamma \delta \sqrt{\frac{1}{\gamma+1}}}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] \quad (7.20)$$

$$f_{BB} = \frac{L}{EI_a} \left[ \frac{\frac{2+\gamma}{2} \sin(\delta \ln(1+\gamma)) - \gamma \delta \cos(\delta \ln(1+\gamma))}{(kL)^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \right] \quad (7.21)$$

Si despejamos los momentos extremos:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AA} & f_{AB} \\ f_{BA} & f_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Que invirtiendo la matriz de transformación da lugar a:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{AA} & c_{AB} \\ c_{BA} & c_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Donde:

$$c_{AA} = \frac{EI_a}{L} \left[ \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \right] \quad (7.24)$$

$$c_{AB} = c_{BA} = \frac{EI_a}{L} \left[ \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) \left( \bar{S} - \gamma\delta\sqrt{\frac{1}{1 + \gamma}} \right)}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \right] \quad (7.25)$$

$$c_{BB} = \frac{EI_a}{L} \left[ \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S}) (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \right] \quad (7.26)$$

$$\bar{S} = \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) \quad (7.27)$$

$$\bar{C} = \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) \quad (7.28)$$

Finalmente, deshaciendo las matrices y recopilando términos, podemos escribir las *ecuaciones pendiente-desplazamiento* para la barra en estudio:

$$M_A = \frac{EI_a}{L} (s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B) \quad (7.29)$$

$$M_B = \frac{EI_a}{L} (s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B) \quad (7.30)$$

Donde:

$$s_{\gamma ii} = \frac{c_{AA}L}{EI_a} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.31)$$

$$s_{\gamma ij} = s_{\gamma ji} = \frac{c_{AB}L}{EI_a} = \frac{c_{BA}L}{EI_a} = \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) \left( \bar{S} - \gamma\delta\sqrt{\frac{1}{1+\gamma}} \right)}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.32)$$

$$s_{\gamma jj} = \frac{c_{BB}L}{EI_a} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.33)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma} - \frac{1}{4}} \quad (7.34)$$

Estas funciones  $s_{\gamma ii}$ ,  $s_{\gamma ij}$ ,  $s_{\gamma ji}$ ,  $s_{\gamma jj}$ , son las *funciones de estabilidad*, semejantes a la de James, pero generalizadas para barras de inercia variable, y que fueron calculadas por primera vez por Ermopoulos [11] en 1988, y empleadas por López Aguilar [22] en 1993 para el análisis de pórticos a dos aguas con barras de inercia variable. Dichas funciones dependen exclusivamente de la carga axial,  $P$ , y del grado de ahusamiento de la barra,  $\gamma$ .

Si hacemos  $\gamma \rightarrow 0$ , se reproducen sin problemas las funciones de estabilidad de James para barras de inercia constante (2.222) y (2.223):

$$s_{ii} = s_{jj} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_{\gamma ii} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_{\gamma jj} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (7.35)$$

$$s_{ij} = s_{ji} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_{\gamma ij} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} s_{\gamma ji} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (7.36)$$

Si mantenemos la inercia variable, pero consideramos que la carga axial,  $P$ , tiende a anularse, se obtienen los coeficientes de rigidez de la barra. Para ello, hacemos  $k \rightarrow 0$ , y puesto que:

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma} - \frac{1}{4}} \quad (7.37)$$

Entonces tenemos  $\delta \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{i}{2}$ , por tanto:

$$z_{\gamma ii} = \lim_{\delta \rightarrow \frac{i}{2}} s_{\gamma ii} = \frac{\gamma(1 + \gamma)(2(1 + \gamma) \ln(1 + \gamma) - \gamma(2 + \gamma))}{(1 + \gamma) \ln^2(1 + \gamma) - \gamma^2} \quad (7.38)$$

$$z_{\gamma ij} = z_{\gamma ji} = \lim_{\delta \rightarrow \frac{i}{2}} s_{\gamma ij} = \lim_{\delta \rightarrow \frac{i}{2}} s_{\gamma ji} = \frac{\gamma(1+\gamma)(2\gamma - (2+\gamma)\ln(1+\gamma))}{(1+\gamma)\ln^2(1+\gamma) - \gamma^2} \quad (7.39)$$

$$z_{\gamma jj} = \lim_{\delta \rightarrow \frac{i}{2}} s_{\gamma jj} = \frac{\gamma(2(1+\gamma)\ln(1+\gamma) - \gamma(2+\gamma))}{(1+\gamma)\ln^2(1+\gamma) - \gamma^2} \quad (7.40)$$

Si además hacemos  $\gamma \rightarrow 0$ , se obtienen los coeficientes de rigidez para barras de inercia constante:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} z_{\gamma ii} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} z_{\gamma jj} = 4 \quad (7.41)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} z_{\gamma ij} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} z_{\gamma ji} = 2 \quad (7.42)$$

### 7.1.2. Caso B: Con desplazamiento lateral relativo entre extremos (Traslacional)

El esquema de análisis elegido será el de doble curvatura, el cual se muestra en la Figura 7.2. Los resultados obtenidos serán válidos para el caso de simple curvatura sin más que cambiar el signo a uno de los momentos extremos.

Los momentos interno y externo son:

$$\text{Momento externo: } M_{ext}(x) = P \cdot v(x) + M_B$$

$$\text{Momento interno: } M_{int}(x) = -EI(x) \cdot v''(x) = -EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot v''(x)$$

Igualando ambos momentos se llega a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 v''(x) + Pv(x) + M_B = 0 \quad (7.43)$$

Introduciendo el parámetro:

$$k^2 = \frac{P}{EI_a} \quad (7.44)$$

La ecuación de equilibrio queda:

$$x^2 v''(x) + k^2 a^2 v(x) + \frac{M_B a^2}{EI_a} = 0 \quad (7.45)$$

Cuya solución general es:

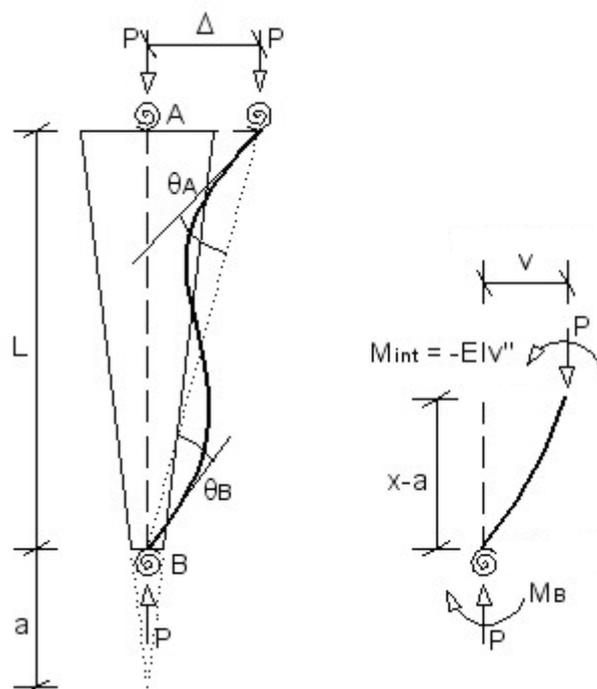


Figura 7.2: Columna de inercia variable con extremos elásticos sometida a carga axial (Caso B)

$$v(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M_B}{EI_a k^2} \quad (7.46)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.47)$$

Para conocer las constantes  $A$  y  $B$ , aplicamos las condiciones de contorno:

$$v(a) = 0 \quad (7.48)$$

$$v(a+L) = \Delta \quad (7.49)$$

$$v'(a) = \theta_B = \frac{M_B}{R_{kB}} \quad (7.50)$$

$$v'(a+L) = \theta_A = \frac{M_A}{R_{kA}} \quad (7.51)$$

Donde  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$  son las constantes elásticas o rigideces de los nudos  $A$  y  $B$  respectivamente.

Aplicando las dos primeras se obtiene:

$$A = \frac{M_A - \sqrt{1+\gamma}M_B \cos(\delta \ln(1+\gamma))}{\sqrt{1+\gamma}EI_a k^2 \sin(\delta \ln(1+\gamma))} \quad (7.52)$$

$$B = \frac{M_B}{EI_a k^2} \quad (7.53)$$

### Carga de pandeo

Aplicando las dos últimas condiciones conjuntamente, se podría hallar la carga de pandeo para la barra en función de las rigideces de los nudos,  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ . No obstante, para determinar dichas rigideces es necesario conocer las características geométricas y elásticas de las barras que concurren en cada uno de los nudos, tema del que nos ocuparemos en la sección 7.2.

En esa sección también podremos comprobar que se puede conocer la carga de pandeo por medio del planteamiento del equilibrio en los nudos, sin conocer la deformada de la barra que aquí hemos calculado.

### Longitud de pandeo

Para conocer la longitud de pandeo debemos aplicar la condición de inflexión de la deformada de la barra:

$$v''(x) = 0 \quad (7.54)$$

Llegándose a la siguiente expresión:

$$\frac{\sin(\delta \ln \frac{x}{a})}{\sin(\delta(\ln(1+\gamma) - \ln \frac{x}{a}))} = \sqrt{1+\gamma} \frac{M_B}{M_A} = \sqrt{1+\gamma} \frac{R_{kB}\theta_B}{R_{kA}\theta_A} \quad (7.55)$$

Para despejar  $x$  y hallar la longitud de pandeo, es necesario de nuevo conocer los valores de  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ . En la sección 7.2, como ya se ha comentado, daremos respuesta a estas incógnitas y podremos conocer los valores de la longitud de pandeo en función del ahusamiento,  $\gamma$ .

### 7.1.2.1. Ecuaciones pendiente-desplazamiento. Funciones de estabilidad

En este caso, las funciones de estabilidad son idénticas a las del Caso A, y las ecuaciones pendiente-desplazamiento, sufren una pequeña variación debido a la presencia del desplazamiento relativo entre extremos,  $\Delta$ . Puesto que el proceso de cálculo es similar al del Caso A, únicamente se mostrarán las ecuaciones finales:

$$M_A = \frac{EI_a}{L} \left[ s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (7.56)$$

$$M_B = \frac{EI_a}{L} \left[ s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (7.57)$$

Donde  $s_{\gamma ii}$ ,  $s_{\gamma ij}$ ,  $s_{\gamma ji}$ ,  $s_{\gamma jj}$ , son las funciones de estabilidad descritas en (7.31), (7.32) y (7.33).

## 7.2. Caracterización de las restricciones elásticas en los extremos de una barra perteneciente a un sistema estructural

En esta sección nos encargaremos de definir y modelizar las restricciones elásticas que caracterizan los extremos de una barra perteneciente a una estructura más compleja. Para ello, estudiaremos las características elásticas de las barras que concurren en los nudos extremos de la barra en cuestión, obteniéndose los valores de las rigideces  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$  que nos servirán para hallar la carga y la longitud de pandeo de la barra, las cuales tuvimos que dejar aparcadas en la sección 7.1, precisamente por el desconocimiento de las rigideces de los nudos.

Se puede intuir que este método es sólo *aproximado*, ya que únicamente definiremos las rigideces de los nudos,  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ , a partir de la información derivada de las barras que concurren en dichos nudos, pero no se tendrá en cuenta el resto del sistema estructural. No obstante, haciendo ciertas suposiciones que se verán más adelante, podemos conseguir unos resultados bastante buenos para la carga y la longitud de pandeo. Además, este método es mucho más versátil y permite una rapidez de cálculo mayor que la proporcionada por el *método exacto* o *método matricial de rigidez*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Consultar referencia [22], donde se analiza de manera exacta un pórtico a dos aguas con barras de inercia variable.

### 7.2.1. Barra de inercia variable rodeada de barras de inercia constante (Estructura Tipo I)

#### 7.2.1.1. Estructura Tipo I-A (Intraslacional)

El esquema de análisis se muestra en la Figura 7.3.

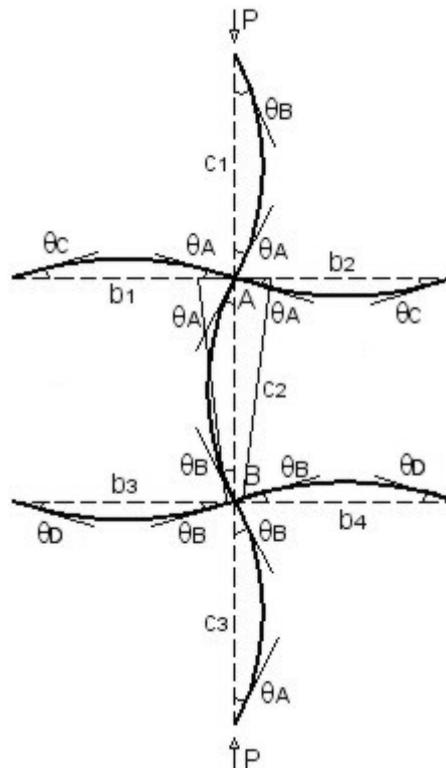


Figura 7.3: Estructura Tipo I-A

Tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- Los nudos de conexión entre barras son rígidos, es decir, todas las barras que concurren en el nudo experimentan el mismo giro.
- La estructura es intraslacional, es decir, no hay posibilidad de desplazamiento transversal relativo entre los nudos.
- Las barras pandean en simple curvatura si la estructura es intraslacional, demostrado por diversos autores [8].

- Existe una carga axial,  $P$ , que comprime por sus extremos a las columnas  $c1$  y  $c3$ .
- Las vigas no conducen carga axial.
- Los giros en los extremos alejados de las vigas (C y D) no son iguales a los giros en los extremos de las columnas (A y B). Con esto se hace una generalización del modelo de Julian y Lawrence, mostrado en 2.1.1.7.
- Los giros en los extremos de las columnas son alternados, según se alternan los nudos (A y B).
- No se considera el peso propio de las barras.

Nuestro objetivo es estudiar como pandea la columna  $c2$ , de longitud  $L$ , comprendida entre los nudos  $A$  y  $B$ , cuya inercia es variable según la expresión de Timoshenko (6.2), cumpliéndose que  $I_A = I_a(1 + \gamma)^2$ ,  $I_B = I_a$ .

Para el análisis, emplearemos las ecuaciones pendiente-desplazamiento deducidas en la sección 7.1.1.1, aplicadas en los nudos  $A$  y  $B$ :

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \quad (7.58)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} (s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B) \quad (7.59)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} (s_{\gamma ji}\theta_A + s_{\gamma jj}\theta_B) \quad (7.60)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} (s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B) \quad (7.61)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4\theta_A - 2\theta_C) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4 - 2\Gamma_A)\theta_A \quad (7.62)$$

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A} \quad (7.63)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4\theta_A - 2\theta_C) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4 - 2\Gamma_A)\theta_A \quad (7.64)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4\theta_B - 2\theta_D) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4 - 2\Gamma_B)\theta_B \quad (7.65)$$

$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B} \quad (7.66)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4\theta_B - 2\theta_D) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4 - 2\Gamma_B)\theta_B \quad (7.67)$$

La condición de equilibrio en el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (7.68)$$

Despejando el momento correspondiente a la columna  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (7.69)$$

Si sustituimos en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros extremos, tenemos que:

$$\begin{aligned} (M_A)_{c2} = & -\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4 - 2\Gamma_A)\theta_A - \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4 - 2\Gamma_A)\theta_A - \\ & - \left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} (s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Por otra parte, de la ecuación (7.59) se deduce:

$$s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B = \frac{(M_A)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \quad (7.71)$$

O bien:

$$s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B = \frac{(M_A)_{c2}}{\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \quad (7.72)$$

Siendo:

$$\Psi_A = \frac{s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B}{s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B} \quad (7.73)$$

Sustituyendo (7.72) en (7.70), tenemos que:

$$(M_A)_{c2} = -(4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \theta_A \quad (7.74)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , obtenemos:

$$(M_B)_{c2} = -(4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}}{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}} \theta_B \quad (7.75)$$

Donde:

$$\Psi_B = \frac{s_{\gamma ji}\theta_A + s_{\gamma jj}\theta_B}{s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B} \quad (7.76)$$

Para simplificar introduciremos los *factores de rigidez relativa* de los nudos:

$$G_A = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.77)$$

$$G_B = \frac{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}} \quad (7.78)$$

Por lo que se obtiene:

$$(M_A)_{c2} = -\frac{(4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \theta_A = -R_{kA}\theta_A \quad (7.79)$$

$$(M_B)_{c2} = -\frac{(4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \theta_B = -R_{kB}\theta_B \quad (7.80)$$

Y ya quedan por tanto definidas las constantes elásticas o rigideces de los nudos:

$$R_{kA} = \frac{(4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \quad (7.81)$$

$$R_{kB} = \frac{(4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \quad (7.82)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (7.59) y (7.79) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (7.60) y (7.80) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[ s_{\gamma ii} + \frac{(4 - 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \right] \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B = 0 \quad (7.83)$$

$$s_{\gamma ji} \theta_A + \left[ s_{\gamma jj} + \frac{(4 - 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \right] \theta_B = 0 \quad (7.84)$$

Las cuales podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s_{\gamma ii} + \frac{(4-2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & s_{\gamma ij} \\ s_{\gamma ji} & s_{\gamma jj} + \frac{(4-2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.85)$$

En el momento de producirse el pandeo, debemos obtener una solución del sistema distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{\gamma ii} + \frac{(4-2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & s_{\gamma ij} \\ s_{\gamma ji} & s_{\gamma jj} + \frac{(4-2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.86)$$

Esto nos proporciona la ecuación característica de la estructura:

$$\left[ s_{\gamma ii} + \frac{(4 - 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \right] \cdot \left[ s_{\gamma jj} + \frac{(4 - 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \right] - s_{\gamma ij} \cdot s_{\gamma ji} = 0 \quad (7.87)$$

Donde debemos sustituir los valores de las funciones de estabilidad:

$$s_{\gamma ii} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.88)$$

$$s_{\gamma ij} = s_{\gamma ji} = \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) \left( \bar{S} - \gamma\delta\sqrt{\frac{1}{1+\gamma}} \right)}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.89)$$

$$s_{\gamma jj} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(2\gamma\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.90)$$

$$\bar{S} = \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) \quad (7.91)$$

$$\bar{C} = \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) \quad (7.92)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma} - \frac{1}{4}} \quad (7.93)$$

Los factores de rigidez relativa  $G_A$  y  $G_B$  empleados en la expresión (7.87) varían desde 0 hasta  $\infty$ , cuando el nudo se encuentra empotrado o articulado respectivamente. El trabajar con el valor  $\infty$  es poco práctico y puede generar problemas, por ello, diversos autores [11, 13, 19, 25] optan por sustituir estos factores de rigidez relativa por los llamados *coeficientes de distribución*. En la bibliografía y la normativa se proponen algunos, los cuales se muestran a continuación:

$$\eta = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.94)$$

$$\kappa = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.95)$$

$$\xi = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.96)$$

Estos coeficientes de distribución, tienen la ventaja de que varían entre 0 y 1, por lo que su manejo es mucho más sencillo. Concretamente, los coeficientes  $\eta$  y  $\xi$ , son empleados en el Eurocódigo 3 [13], y el coeficiente  $\kappa$ , es propuesto en la EA-95 [25]. En este caso, nosotros utilizaremos el coeficiente  $\eta$ , el cual toma el valor 0 cuando el nudo está empotrado, y el valor 1 cuando se encuentra articulado. Podemos sustituir el factor de rigidez relativa,  $G$ , por el coeficiente de distribución,  $\eta$ , teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$G = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad (7.97)$$

Según esto, tendríamos que:

$$G_A = \frac{\eta_A}{1 - \eta_A} \quad (7.98)$$

$$G_B = \frac{\eta_B}{1 - \eta_B} \quad (7.99)$$

Donde:

$$\eta_A = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.100)$$

$$\eta_B = \frac{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}} \quad (7.101)$$

Y por tanto, la ecuación (7.87) quedaría de la siguiente forma:

$$\left[ s_{\gamma ii} + (4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{1}{\eta_A} - 1\right) \right] \cdot \left[ s_{\gamma jj} + (4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{1}{\eta_B} - 1\right) \right] - s_{\gamma ij} \cdot s_{\gamma ji} = 0 \quad (7.102)$$

Para generalizar aún más la ecuación (7.102), conviene hacerla independiente de las relaciones entre giros,  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$ , y de los factores  $\Psi_A$  y  $\Psi_B$ . Para ello podemos incluir estos parámetros intrínsecamente en los coeficientes de distribución,  $\eta_A$  y  $\eta_B$ , de tal manera que estos coeficientes queden modificados, por lo que usaremos la nueva notación,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . Veamos el proceso de transformación:

Para el nudo A:

$$\begin{aligned} (4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{1}{\eta_A} - 1\right) &= (4 - 2\Gamma_A)\Psi_A \left[ \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \right] = \\ &= 4 \left[ \frac{\left(1 - \frac{\Gamma_A}{2}\right) \left[\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}\right]}{\frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1}}{\Psi_A} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \right] = 4 \left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) \end{aligned} \quad (7.103)$$

Y para el nudo B:

$$\begin{aligned} (4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{1}{\eta_B} - 1\right) &= (4 - 2\Gamma_B)\Psi_B \left[ \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}}{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}} \right] = \\ &= 4 \left[ \frac{\left(1 - \frac{\Gamma_B}{2}\right) \left[\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}\right]}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\Psi_B}} \right] = 4 \left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) \end{aligned} \quad (7.104)$$

Es posible hacer una pequeña simplificación de carácter conservador que nos facilitará los cálculos:

$$\Psi_A = \Psi_B \approx 1 \quad (7.105)$$

Según esto, los nuevos coeficientes de reparto modificados son:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(1 - \frac{\Gamma_A}{2}\right) \left[\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.106)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \left(1 - \frac{\Gamma_B}{2}\right) \left[\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.107)$$

Esto nos permite redefinir la ecuación (7.102):

$$\left[ s_{\gamma ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot \left[ s_{\gamma jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] - s_{\gamma ij} \cdot s_{\gamma ji} = 0 \quad (7.108)$$

Como se puede observar, hemos simplificado notablemente la ecuación característica de la estructura, incluyendo en los coeficientes de distribución diversos parámetros variables que restaban generalidad a la ecuación.

### Carga de pandeo

En esta expresión (7.108), una vez fijados los valores del grado de ahusamiento,  $\gamma$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , se puede despejar el valor de  $\delta$ , y finalmente el valor de la carga de pandeo:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.109)$$

$$k^2 = \frac{P_p}{EI_a} \quad (7.110)$$

$$P_p = \frac{\left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) \gamma^2 EI_a}{L^2} \quad (7.111)$$

Que como de costumbre podemos expresar según la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (7.112)$$

Donde:

$$m = \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) \gamma^2 \quad (7.113)$$

Como se puede ver, la carga de pandeo,  $P_p$ , dependerá del parámetro  $m$ , el cual será función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . En las Figuras (7.4 a 7.8) se muestran diferentes ábacos elaborados para el cálculo de  $m$  en función de estos tres parámetros, con valores de  $\gamma$  comprendidos entre 0 y 2, intervalo habitual de diseño según la bibliografía [22, 30]. La misma información recogida en estos ábacos, así como los demás de aquí en adelante, se pueden encontrar también en el Anejo A en forma de tablas, las cuales permiten obtener valores más precisos. No obstante, el mostrar aquí las soluciones gráficas, tiene el objetivo de mostrar la tendencia o evolución de los parámetros de la barra a medida que su grado de ahusamiento aumenta.

Se puede observar de los ábacos, como los valores de  $m$  obtenidos para los puntos extremos  $((\eta_A^*, \eta_B^*) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1))$  coinciden con los valores obtenidos de la resolución de los casos de Euler - barra biempotrada, empotrada-articulada, articulada-empotrada y biarticulada respectivamente - . Como era de esperar, este modelo general abarca con exactitud todos los casos particulares estudiados en el capítulo 6.

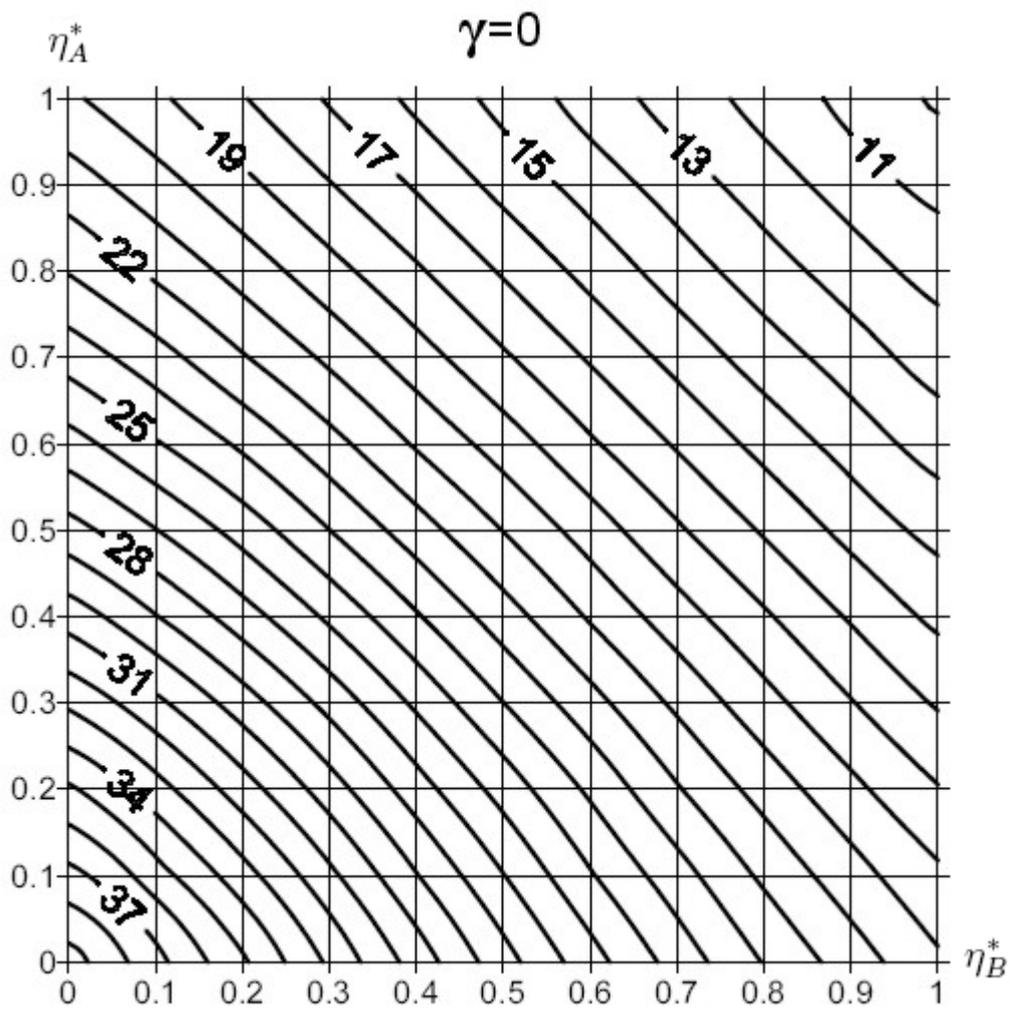


Figura 7.4: Estructura Tipo I-A. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

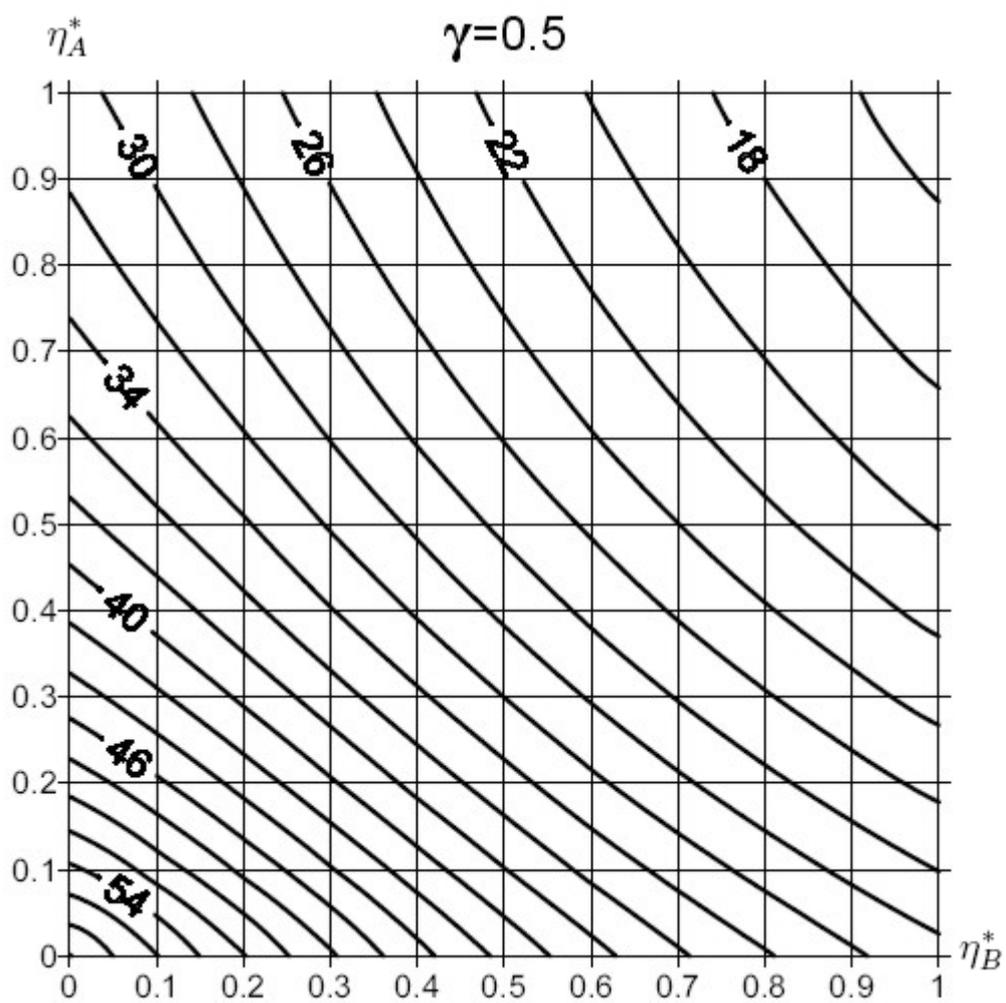


Figura 7.5: Estructura Tipo I-A. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

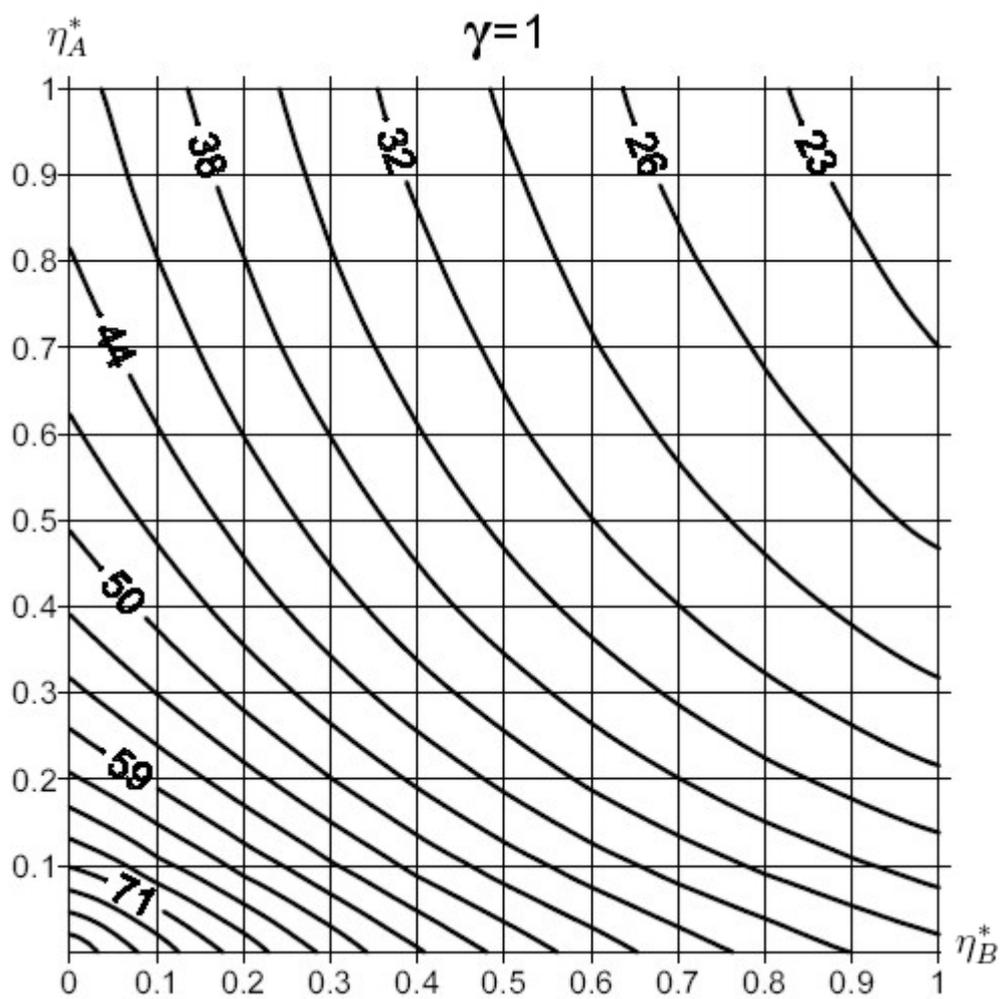


Figura 7.6: Estructura Tipo I-A. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

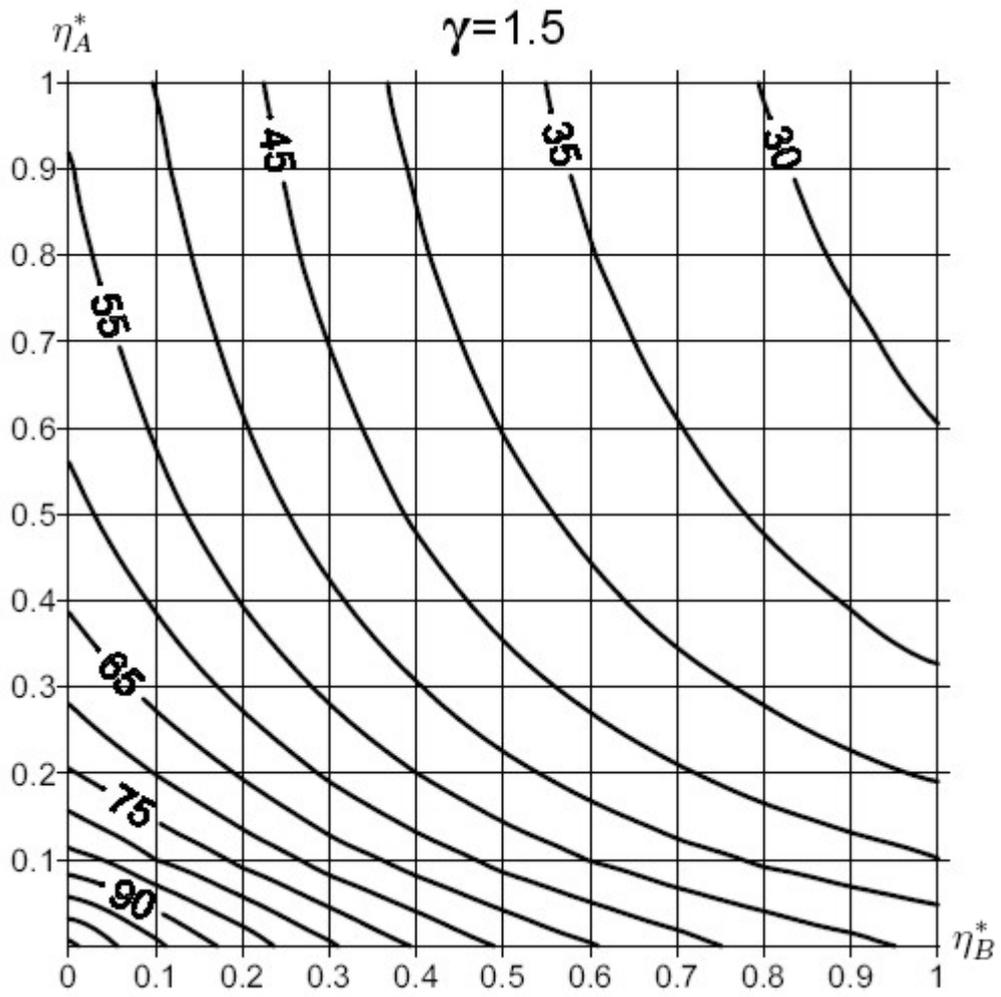


Figura 7.7: Estructura Tipo I-A. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

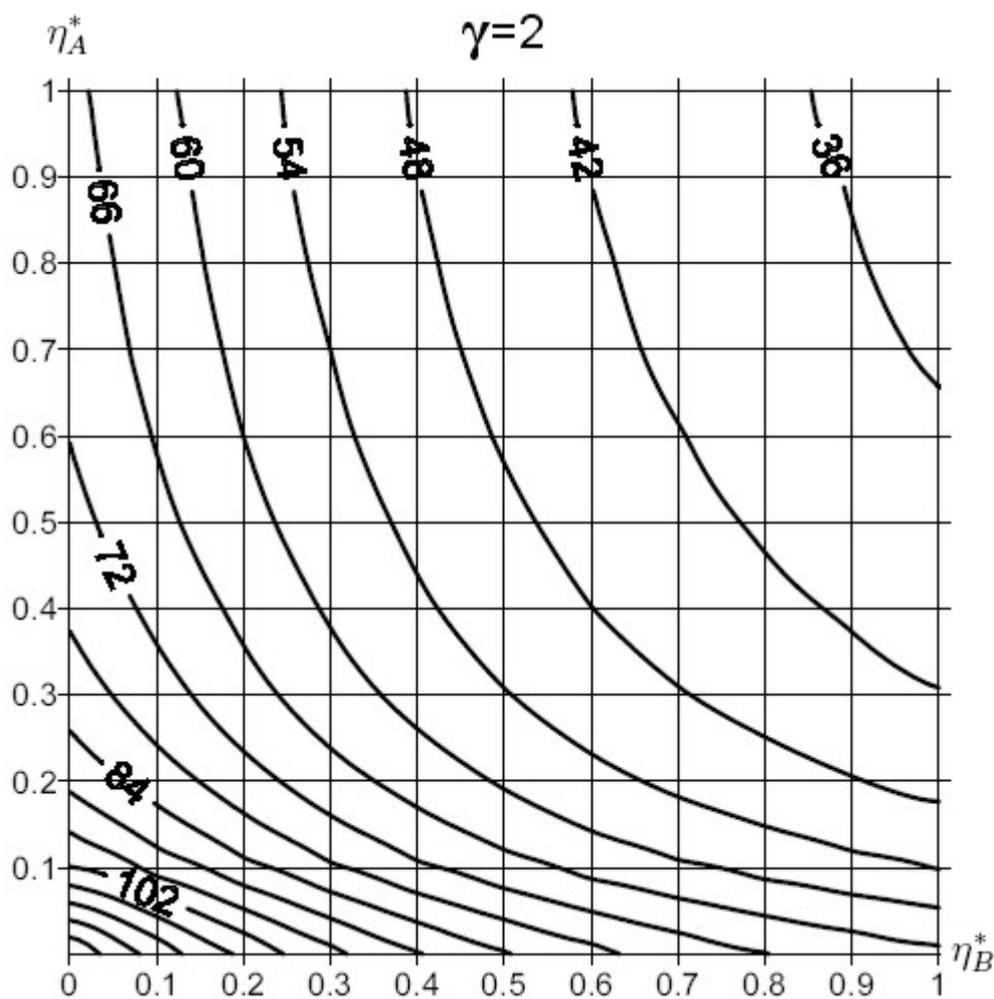


Figura 7.8: Estructura Tipo I-A. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

### Longitud de pandeo

Para hallar la longitud de pandeo de la columna en estudio, es necesario recurrir a la expresión (7.14), sección 7.1.1:

$$\frac{\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\delta \left(\ln(1+\gamma) - \ln \frac{x}{a}\right)\right)} = \sqrt{1+\gamma} \frac{M_B}{M_A} = \sqrt{1+\gamma} \frac{R_{kB}\theta_B}{R_{kA}\theta_A} \quad (7.114)$$

Y como ya hemos deducido anteriormente en (7.81), (7.82), (7.103) y (7.104), tenemos que:

$$R_{kA} = 4 \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \quad (7.115)$$

$$R_{kB} = 4 \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \quad (7.116)$$

Por otra parte, no es posible conocer los giros  $\theta_A$  y  $\theta_B$  de manera explícita, pero si es posible conocer la relación entre ambos, lo cual es suficiente para nuestro objetivo. El procedimiento consiste en igualar el momento interno con el momento externo a cada nudo:

$$M_A = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} (s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B) = -R_{kA} \theta_A \quad (7.117)$$

$$M_B = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} (s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B) = -R_{kB} \theta_B \quad (7.118)$$

Sustituyendo  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$  por sus respectivos valores, queda:

$$s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \theta_A \quad (7.119)$$

$$s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B = -4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \theta_B \quad (7.120)$$

Introduciendo la relación entre los giros:

$$\Gamma_{BA} = \frac{\theta_B}{\theta_A} \quad (7.121)$$

Podemos reescribir las ecuaciones anteriores:

$$s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} \Gamma_{BA} = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \quad (7.122)$$

$$s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj} \Gamma_{BA} = -4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA} \quad (7.123)$$

Si sumamos ambas ecuaciones, se obtiene la ecuación agrupada:

$$\Gamma_{BA}(s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) + s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji} = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) - 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA} \quad (7.124)$$

De donde podemos despejar la incógnita:

$$\Gamma_{BA} = \frac{\theta_B}{\theta_A} = -\frac{4\left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji})}{4\left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj})} \quad (7.125)$$

Y sustituyendo (7.115), (7.116) y (7.125) en la ecuación (7.114), queda:

$$\frac{\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\delta \left(\ln(1 + \gamma) - \ln \frac{x}{a}\right)\right)} = -\frac{\left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) \left[4\left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji})\right]}{(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) \left[4\left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj})\right]} \quad (7.126)$$

Ahora ya podemos despejar  $x$  de esta ecuación:

$$x = a \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + n\pi \right] \right] =$$

$$\frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + n\pi \right] \right] \quad (7.127)$$

Donde:

$$C_1 = -\left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) \left[4\left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji})\right] \quad (7.128)$$

$$C_2 = (1 + \gamma)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\eta_A^*} - 1\right) \left[4\left(\frac{1}{\eta_B^*} - 1\right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj})\right] \quad (7.129)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  dentro del intervalo  $x \in [a, a + L]$ . En este caso tenemos  $n = 0$  y  $n = 1$ . Según esto:

$$L_k = \Delta x = x_1 - x_0 =$$

$$= \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + \pi \right] \right] -$$

$$- \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] =$$

$$= \frac{L}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] \quad (7.130)$$

Y el coeficiente de esbeltez vendrá dado por:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (7.131)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] \quad (7.132)$$

En las Figuras (7.9 a 7.13) se muestran diferentes ábacos elaborados para el cálculo de  $\beta_\gamma$  en función de  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$  y  $\gamma$ , con valores de  $\gamma$  comprendidos entre 0 y 2, al igual que se hizo para el cálculo de  $m$ . El ábaco 7.9 representa el caso particular para barra de inercia constante, y se puede encontrar en el Eurocódigo 3 [13] (Anexo E).

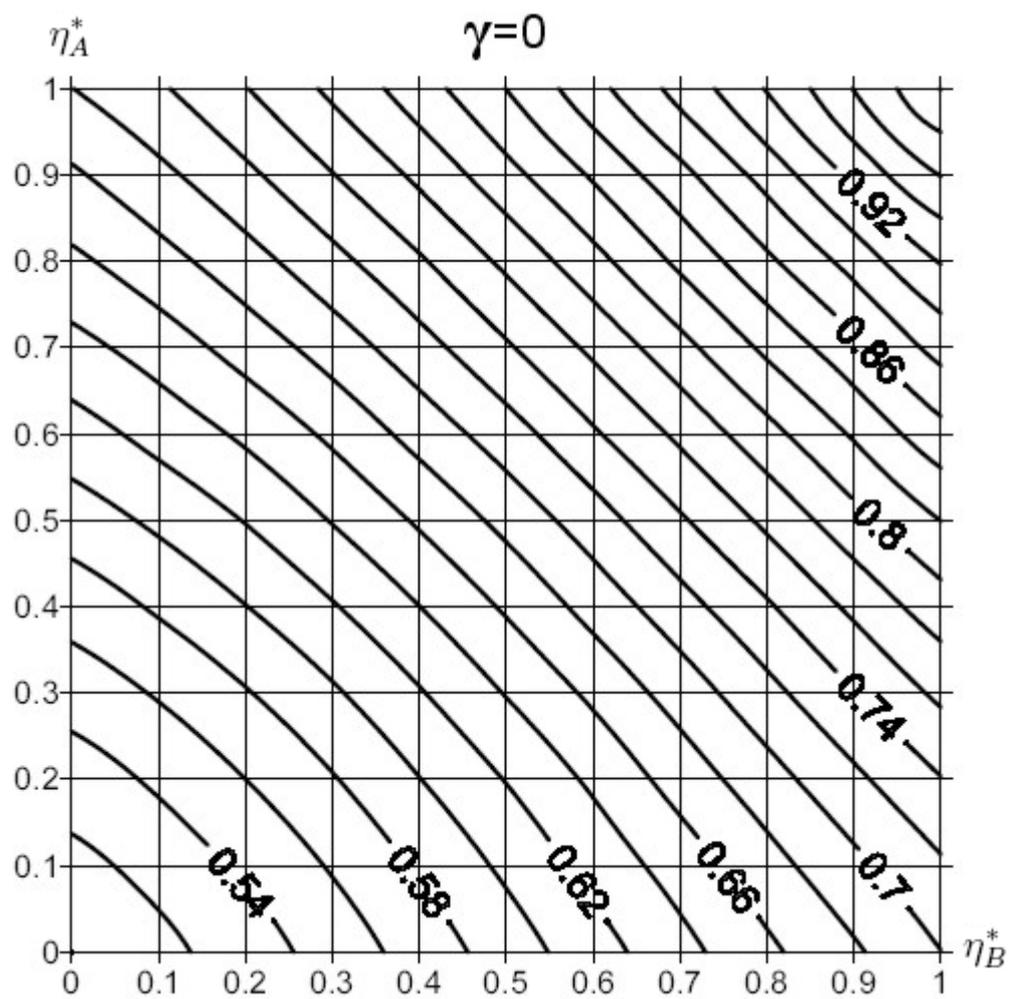


Figura 7.9: Estructura Tipo I-A. Valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

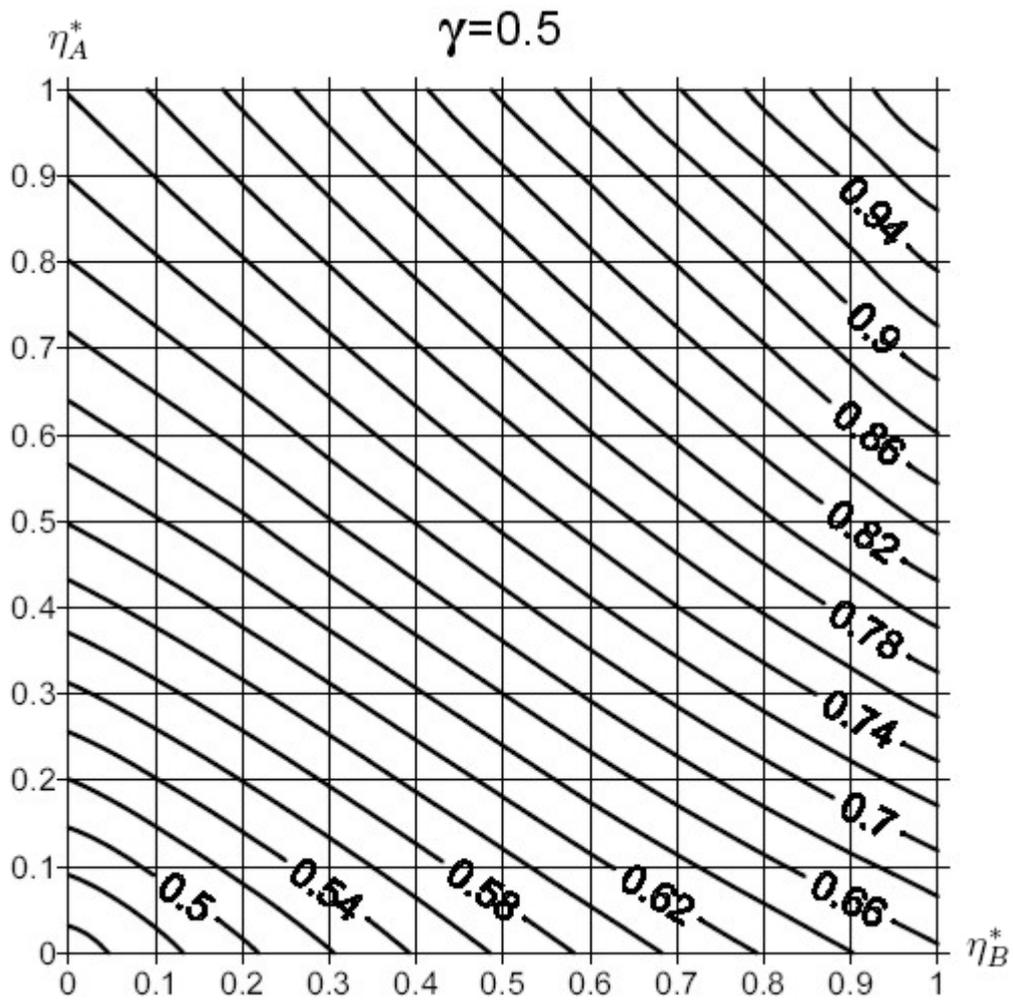


Figura 7.10: Estructura Tipo I-A. Valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

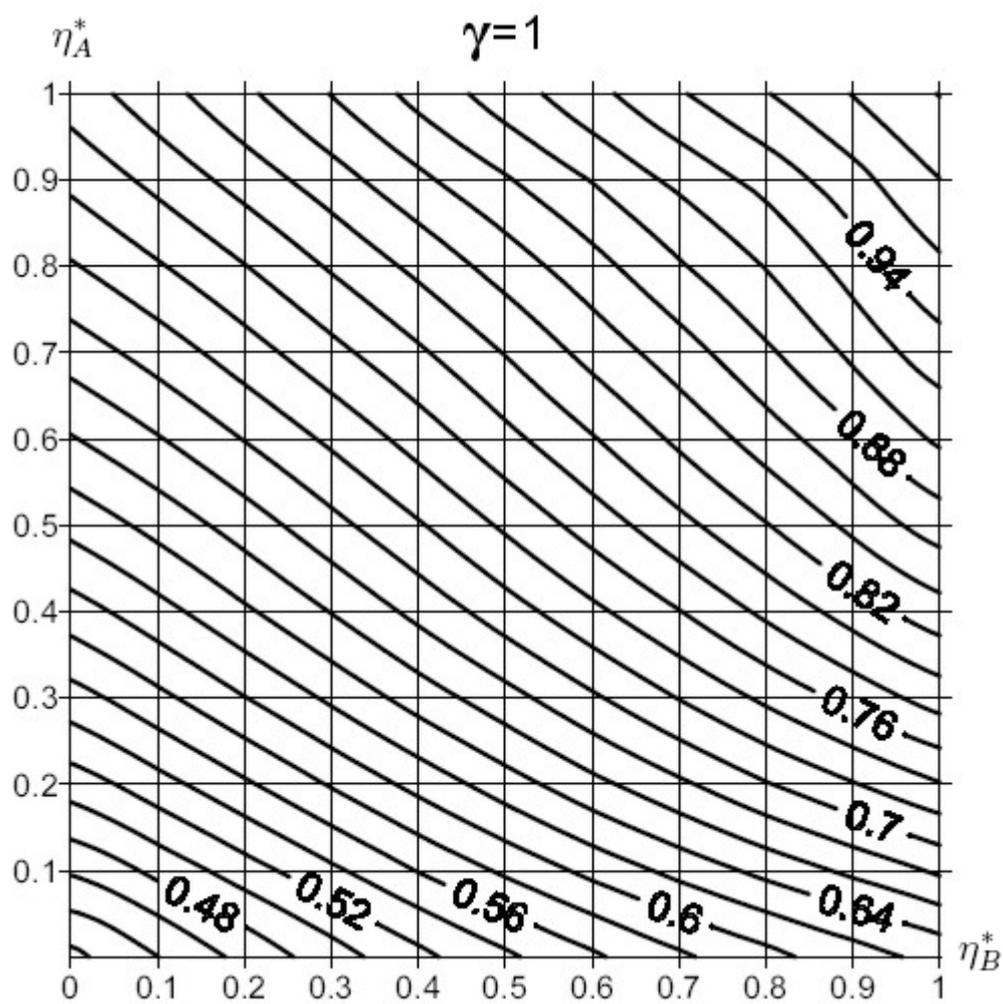


Figura 7.11: Estructura Tipo I-A. Valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

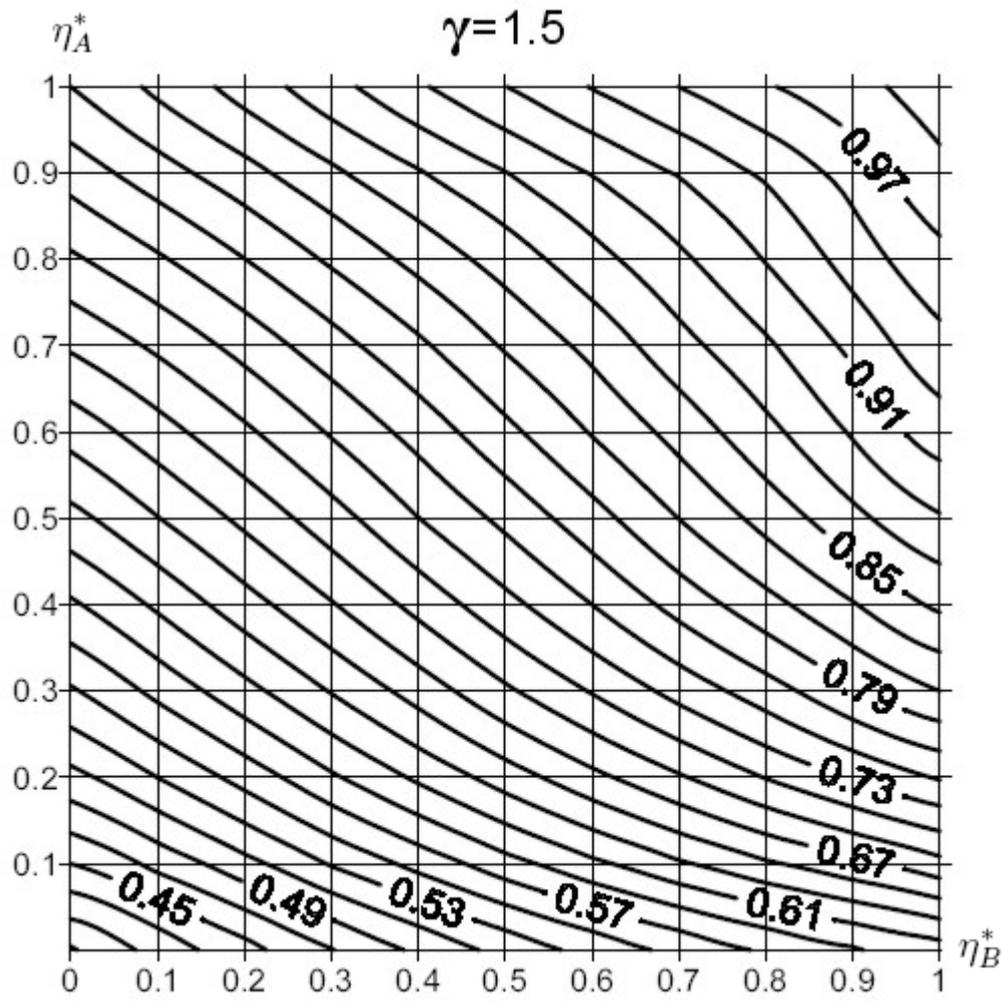


Figura 7.12: Estructura Tipo I-A. Valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

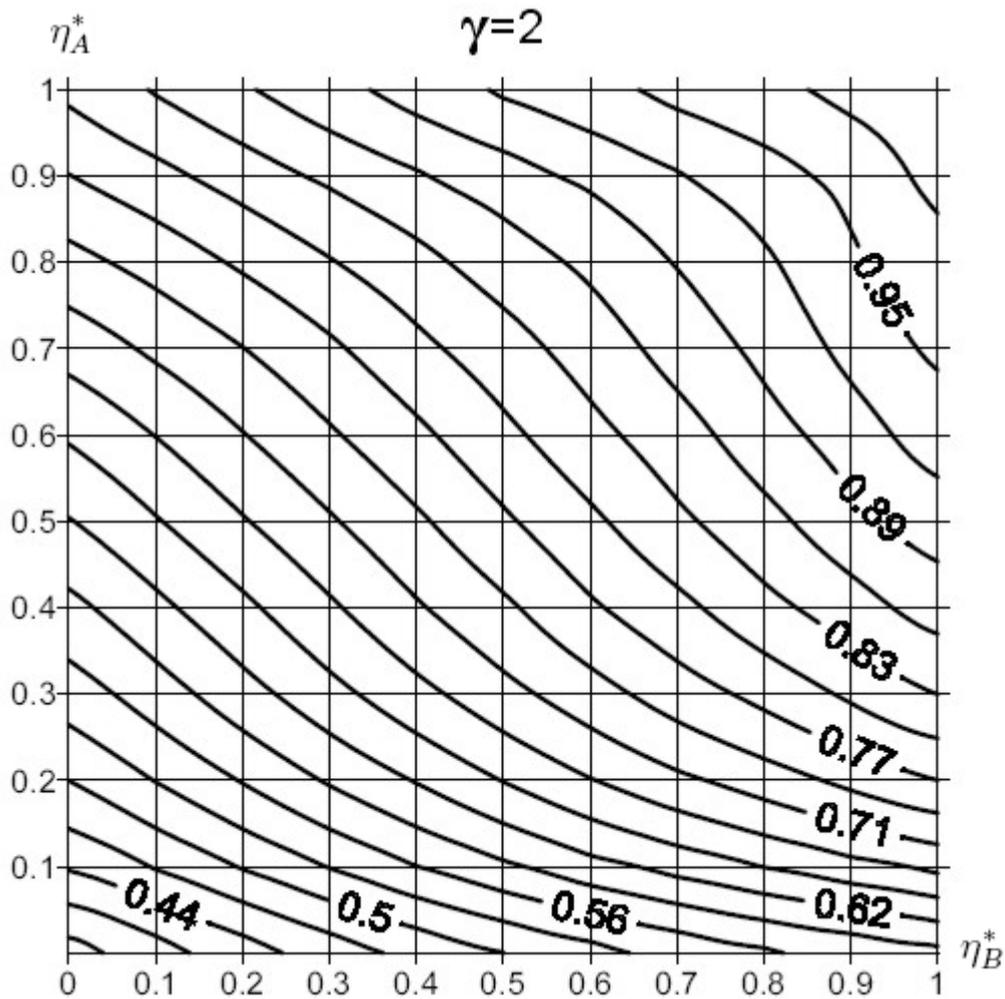


Figura 7.13: Estructura Tipo I-A. Valores de  $\beta_\gamma$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

### Columna equivalente

Para hallar el momento de inercia de la columna equivalente, aplicamos la ecuación de equivalencia:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (7.133)$$

De donde el momento de inercia equivalente resulta ser:

$$I_{eq} = bI_a \quad (7.134)$$

Siendo:

$$b = m \left( \frac{\beta_\gamma}{\pi} \right)^2 \quad (7.135)$$

Los valores de  $m$  y  $\beta_\gamma$  que debemos emplear, resultan de la resolución de las ecuaciones (7.113) y (7.132), vistas anteriormente. En las Figuras (7.14 a 7.17) se muestran los valores de  $b$  en ábacos similares a los elaborados para  $m$  y  $\beta_\gamma$ .

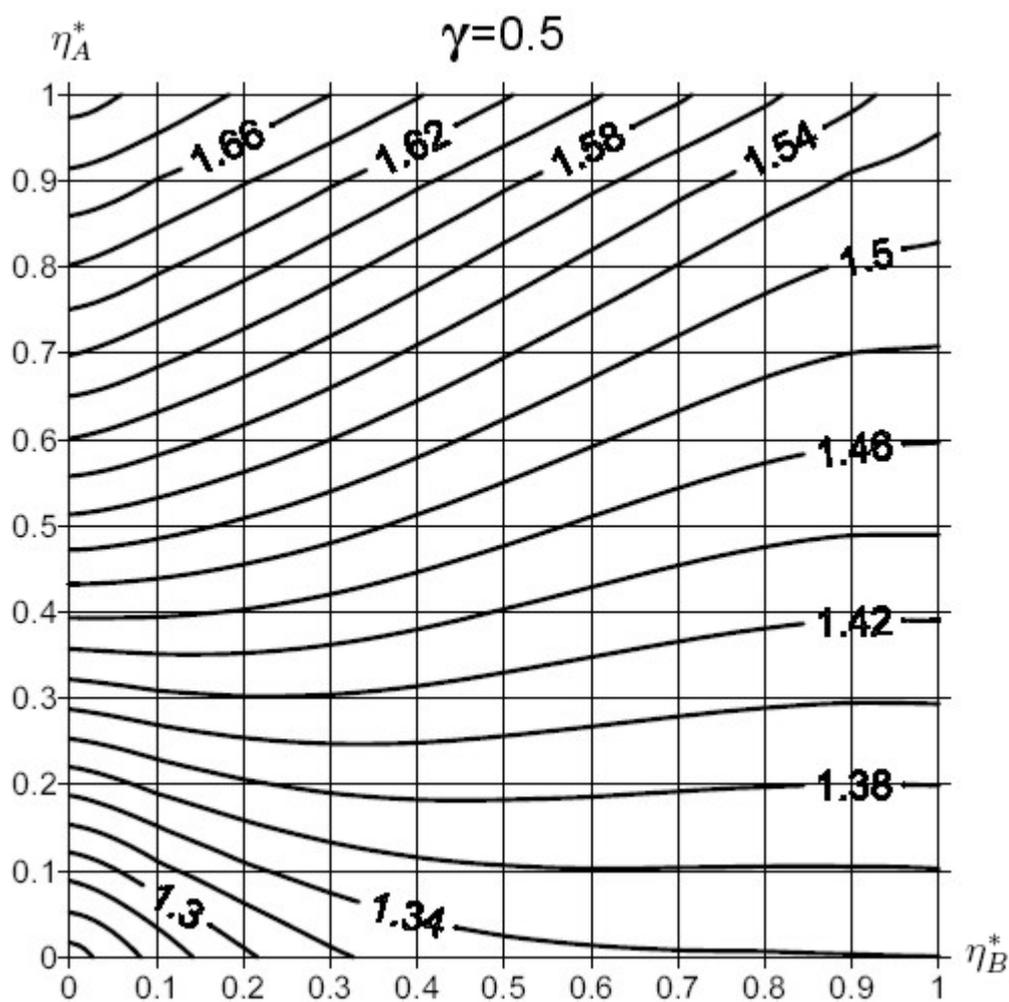


Figura 7.14: Estructura Tipo I-A. Valores de  $b$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

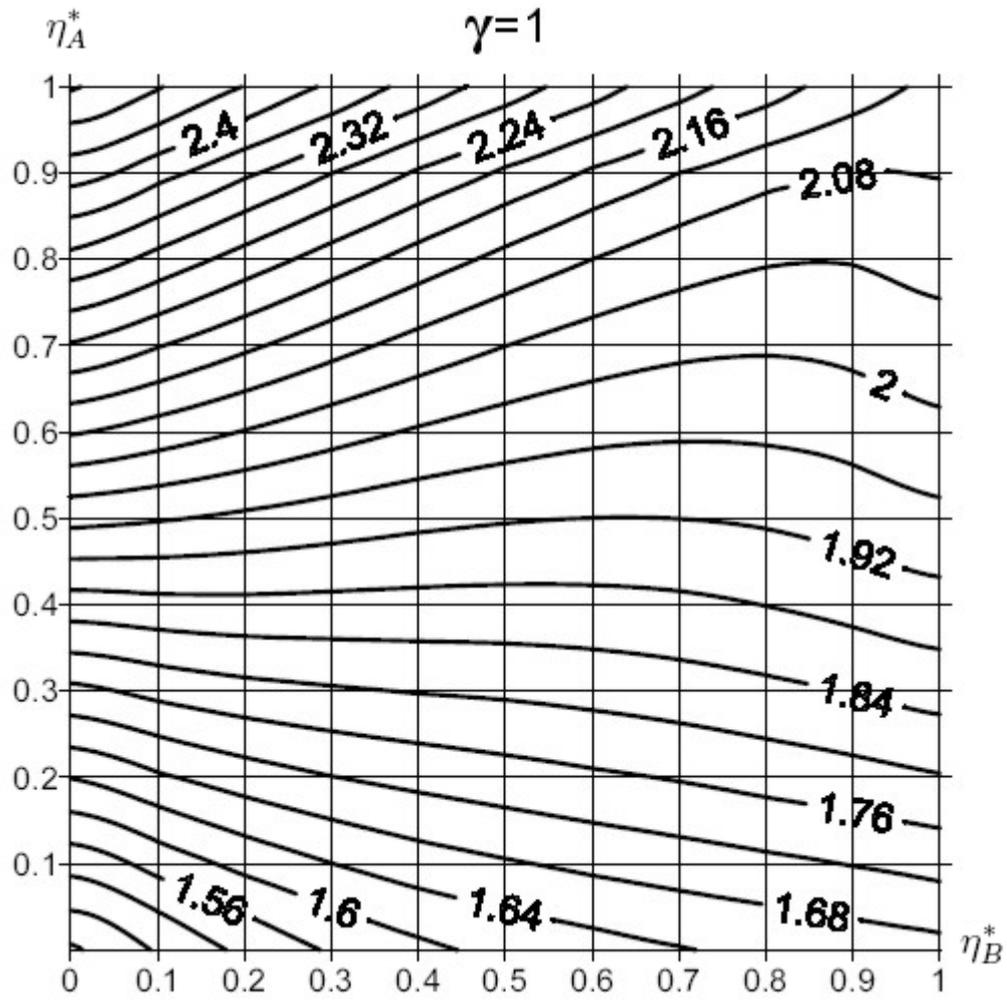


Figura 7.15: Estructura Tipo I-A. Valores de  $b$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

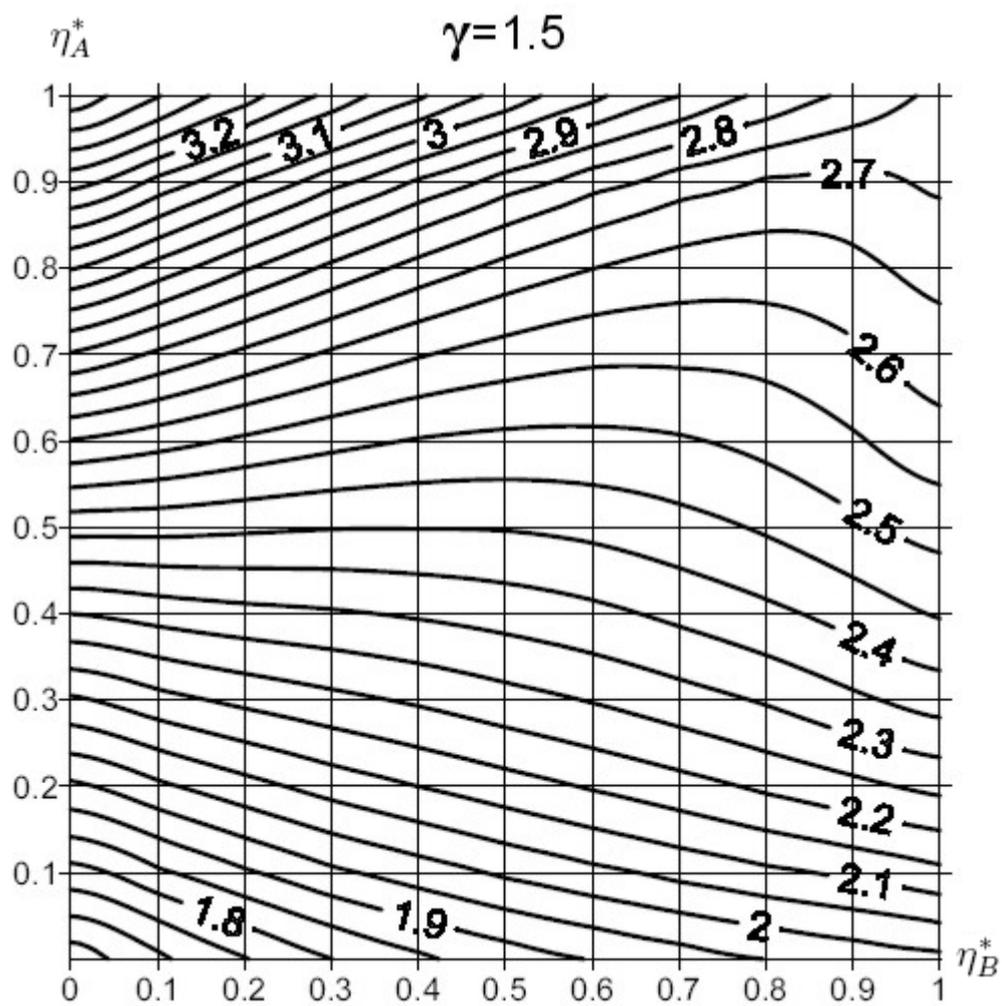


Figura 7.16: Estructura Tipo I-A. Valores de  $b$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

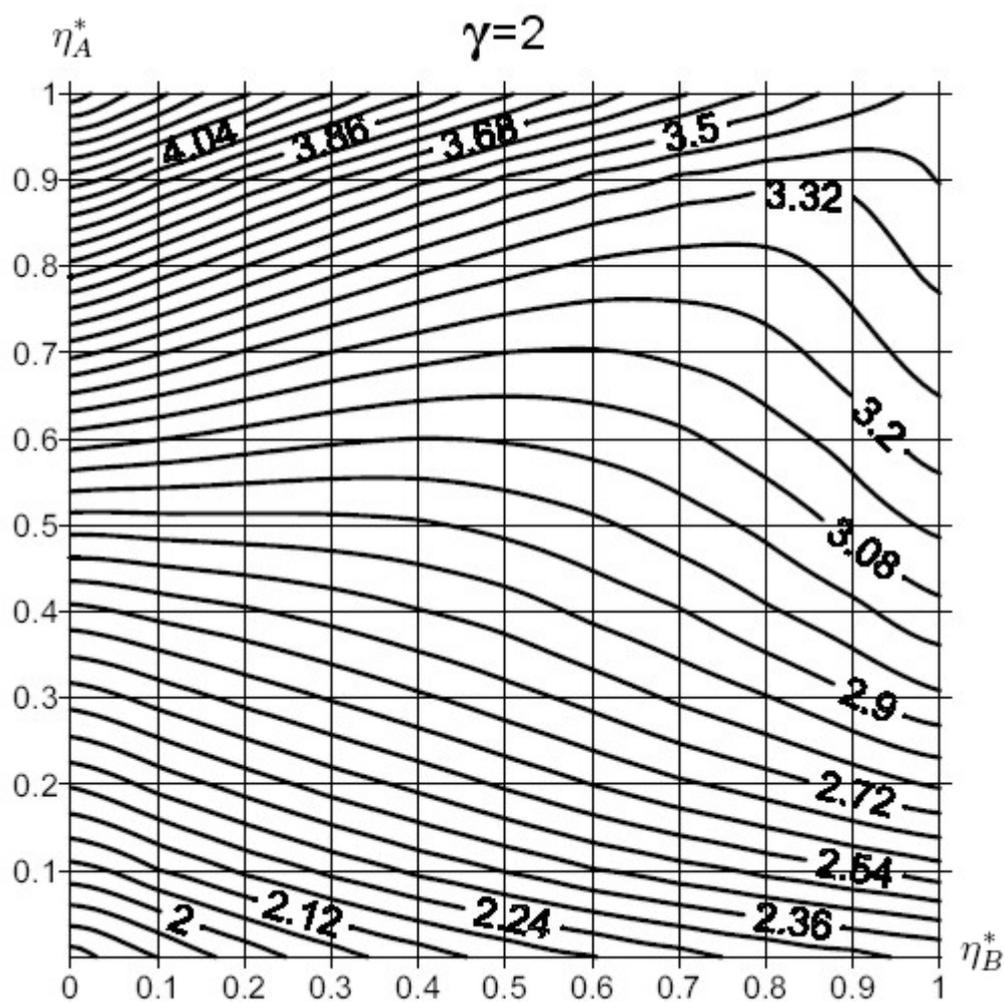


Figura 7.17: Estructura Tipo I-A. Valores de  $b$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

Una vez caracterizado el comportamiento de la columna en estudio dentro de la estructura general de la Figura 7.3, analizaremos a continuación algunos casos particulares de interés práctico.

### Estructura Tipo I-A.1: Nudos C y D empotrados

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.18. Los nudos  $C$  y  $D$  se encuentran empotrados, de tal manera que el giro no está permitido, y por tanto:

$$\theta_C = \theta_D = 0 \quad (7.136)$$

En consecuencia:

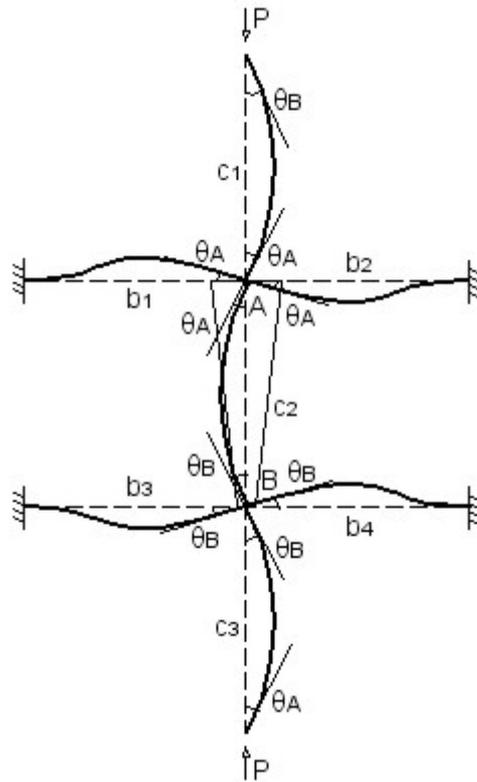


Figura 7.18: Estructura Tipo I-A.1

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 0 \quad (7.137)$$

Y los coeficientes de distribución (7.106) y (7.107), tomarían los siguientes valores:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.138)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}} \quad (7.139)$$

### Estructura Tipo I-A.2: Nudos C y D articulados

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.19. Los nudos C y D se encuentran articulados, de tal manera que el giro es la mitad del de los nudos A y B, es decir:

$$\theta_C = \frac{1}{2}\theta_A \quad (7.140)$$

$$\theta_D = \frac{1}{2}\theta_B \quad (7.141)$$

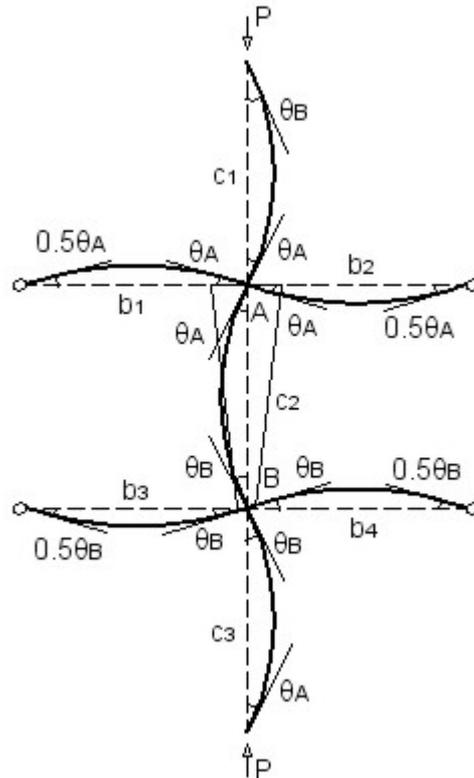


Figura 7.19: Estructura Tipo I-A.2

Según esto, tenemos que:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \frac{1}{2} \quad (7.142)$$

Siendo entonces los coeficientes de distribución:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} \right]} \quad (7.143)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} \right]} \quad (7.144)$$

**Estructura Tipo I-A.3: Nudos C y D con giros iguales a los nudos A y B**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.20. Los nudos *C* tienen giros de igual valor al del nudo *A*, al igual que los nudos *D* respecto del *B*:

$$\theta_C = \theta_A \tag{7.145}$$

$$\theta_D = \theta_B \tag{7.146}$$

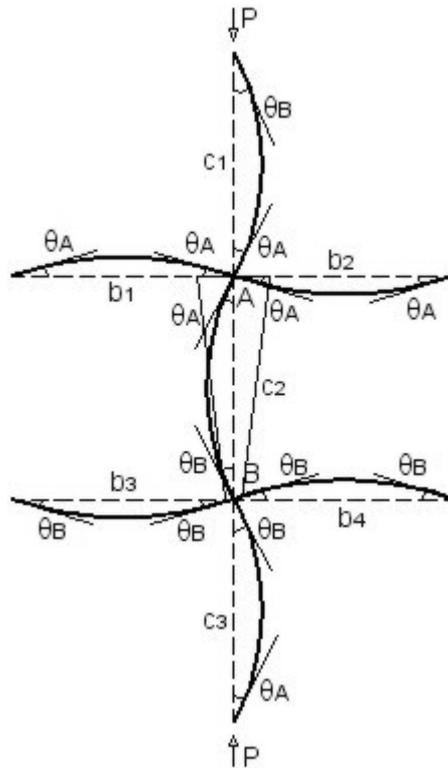


Figura 7.20: Estructura Tipo I-A.3

Y por tanto:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 1 \tag{7.147}$$

Con lo que los coeficientes de distribución en este caso quedan de la siguiente forma:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} \right]} \quad (7.148)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} \right]} \quad (7.149)$$

**7.2.1.2. Estructura Tipo I-B (Traslacional)**

El esquema de análisis se muestra en la Figura 7.21.

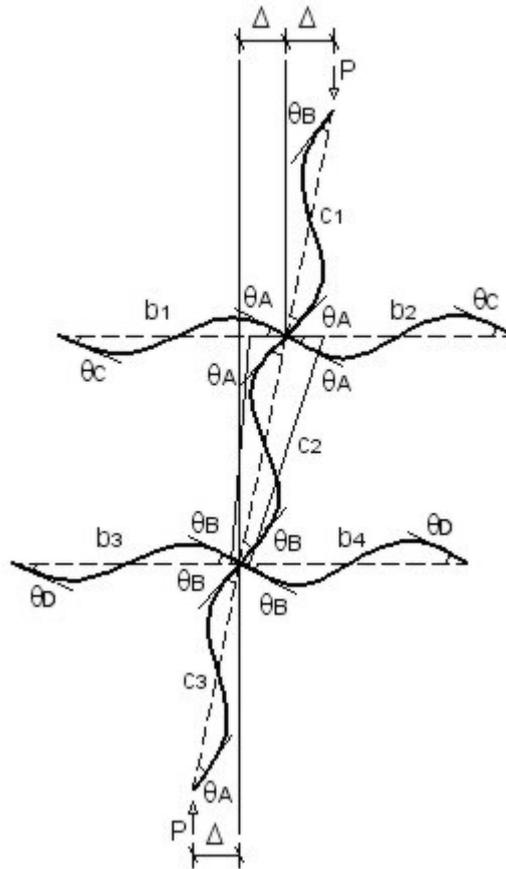


Figura 7.21: Estructura Tipo I-B

Tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- Los nudos de conexión entre barras son rígidos, es decir, todas las barras que concurren en un nudo experimentan el mismo giro.

- La estructura es traslacional, es decir, existe un posible desplazamiento relativo,  $\Delta$ , entre los nudos.
- Las barras pandean en doble curvatura si la estructura es traslacional, demostrado por diversos autores [8].
- Existe un carga axial,  $P$ , que comprime por sus extremos a las columnas  $c1$  y  $c3$ .
- Las vigas no conducen carga axial.
- Los giros en los extremos alejados de las vigas (C y D) no son iguales a los giros en los extremos de las columnas (A y B). Con esto se hace una generalización del modelo de Julian y Lawrence, mostrado en 2.1.1.7.
- Los giros en los extremos de las columnas son alternados, según se alternan los nudos (A y B).
- No se considera el peso propio de las barras.

Nuestro objetivo es estudiar como pandea la columna  $c2$ , de longitud  $L$ , comprendida entre los nudos  $A$  y  $B$ , cuya inercia es variable según la expresión de Timoshenko (6.2), cumpliéndose que  $I_A = I_a(1 + \gamma)^2$ ,  $I_B = I_a$ .

Para el análisis, emplearemos las ecuaciones pendiente-desplazamiento deducidas en el sección 7.1.2.1, aplicadas en los nudos  $A$  y  $B$ :

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \quad (7.150)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left[ s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (7.151)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left[ s_{\gamma ji}\theta_A + s_{\gamma jj}\theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (7.152)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} \left[ s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L_{c3}} \right] \quad (7.153)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4\theta_A + 2\theta_C) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4 + 2\Gamma_A)\theta_A \quad (7.154)$$

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A} \quad (7.155)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4\theta_A + 2\theta_C) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4 + 2\Gamma_A)\theta_A \quad (7.156)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4\theta_B + 2\theta_D) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} (4 + 2\Gamma_B)\theta_B \quad (7.157)$$

$$\Gamma_{EB} = \frac{\theta_D}{\theta_B} \quad (7.158)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4\theta_B + 2\theta_D) = \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} (4 + 2\Gamma_B)\theta_B \quad (7.159)$$

La condición de equilibrio en el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (7.160)$$

Despejando el momento correspondiente a la columna  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (7.161)$$

Si sustituimos en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros extremos, tenemos que:

$$(M_A)_{c2} = -\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} (4 + 2\Gamma_A)\theta_A - \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} (4 + 2\Gamma_A)\theta_A -$$

$$-\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} \left[ s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \quad (7.162)$$

Por otra parte, de la ecuación (7.151) tenemos que:

$$s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij})\frac{\Delta}{L_{c2}} = \frac{(M_A)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \quad (7.163)$$

O bien:

$$s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}} = \frac{(M_A)_{c2}}{\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \quad (7.164)$$

Siendo:

$$\Psi_A = \frac{s_{\gamma ii}\theta_A + s_{\gamma ij}\theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij})\frac{\Delta}{L_{c2}}}{s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B - (s_{ii} + s_{ij})\frac{\Delta}{L_{c1}}} \quad (7.165)$$

Sustituyendo (7.164) en (7.162), tenemos que:

$$(M_A)_{c2} = -(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}} \theta_A \quad (7.166)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , obtenemos:

$$(M_B)_{c2} = -(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}}{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}} \theta_B \quad (7.167)$$

Donde:

$$\Psi_B = \frac{s_{\gamma ji}\theta_A + s_{\gamma jj}\theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj})\frac{\Delta}{L_{c2}}}{s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B - (s_{ji} + s_{jj})\frac{\Delta}{L_{c3}}} \quad (7.168)$$

Para simplificar introduciremos los factores de rigidez relativa de los nudos:

$$G_A = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.169)$$

$$G_B = \frac{\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}} \quad (7.170)$$

Por lo que se obtiene:

$$(M_A)_{c2} = -\frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A}\theta_A = -R_{kA}\theta_A \quad (7.171)$$

$$(M_B)_{c2} = -\frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B}\theta_B = -R_{kB}\theta_B \quad (7.172)$$

Y ya quedan por tanto definidas las constantes elásticas o rigideces de los nudos:

$$R_{kA} = \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \quad (7.173)$$

$$R_{kB} = \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \quad (7.174)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (7.151) y (7.171) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (7.152) y (7.172) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[ s_{\gamma ii} + \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \right] \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.175)$$

$$s_{\gamma ji} \theta_A + \left[ s_{\gamma jj} + \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \right] \theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.176)$$

Aquí tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas ( $\theta_A$ ,  $\theta_B$  y  $\Delta/L_{c2}$ ), por lo que necesitamos una ecuación más. Dicha ecuación puede ser obtenida planteando el equilibrio estático de la barra  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} + (M_B)_{c2} + P\Delta = 0 \quad (7.177)$$

Podemos ahora sustituir las expresiones (7.171) y (7.172) en esta última ecuación:

$$-\frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A}\theta_A - \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B}\theta_B + P\Delta = 0 \quad (7.178)$$

Y por otra parte, podemos modificar el término en función de  $P$  de manera más conveniente en función de  $\delta$ , como se hizo en (7.111):

$$P = \frac{\left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right)\gamma^2(EI_a)_{c2}}{L_{c2}^2} \quad (7.179)$$

Con lo que tendríamos:

$$P\Delta = \frac{(\delta^2 + \frac{1}{4})\gamma^2(EI_a)_{c2}\Delta}{L_{c2}^2} \quad (7.180)$$

No obstante, podemos poner este término en una forma más conveniente haciendo la siguiente transformación:

$$P\Delta = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right)\gamma^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} \quad (7.181)$$

Sustituyendo este término de nuevo en la ecuación (7.178), queda:

$$\begin{aligned} & -\frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}\theta_A}{G_A} - \frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}\theta_B}{G_B} + \\ & + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right)\gamma^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \end{aligned} \quad (7.182)$$

Y eliminando el factor común:

$$-\frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A}\theta_A - \frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B}\theta_B + \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right)\gamma^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.183)$$

Por tanto, recopilando las tres ecuaciones de equilibrio (7.175), (7.176) y (7.183), y escribiéndolas en forma matricial, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} s_{\gamma ii} + \frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & s_{\gamma ij} & -(s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \\ s_{\gamma ji} & s_{\gamma jj} + \frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} & -(s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \\ -\frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & -\frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} & (\delta^2 + \frac{1}{4})\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \frac{\Delta}{L_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.184)$$

En el momento de producirse el pandeo, debemos obtener una solución distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{\gamma ii} + \frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & s_{\gamma ij} & -(s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \\ s_{\gamma ji} & s_{\gamma jj} + \frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} & -(s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \\ -\frac{(4+2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} & -\frac{(4+2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} & (\delta^2 + \frac{1}{4})\gamma^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.185)$$

Esto nos proporciona la ecuación característica de la estructura:

$$\begin{aligned}
& \left[ s_{\gamma ii} + \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \right] \cdot \left[ s_{\gamma jj} + \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \right] \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 + \\
& + \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \cdot (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \cdot s_{\gamma ji} + \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \cdot (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \cdot s_{\gamma ij} - \\
& - \left[ s_{\gamma jj} + \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \right] \cdot \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \cdot (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) - \\
& - \left[ s_{\gamma ii} + \frac{(4 + 2\Gamma_A)\Psi_A}{G_A} \right] \cdot \frac{(4 + 2\Gamma_B)\Psi_B}{G_B} \cdot (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) - \\
& - s_{\gamma ij} \cdot s_{\gamma ji} \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 = 0 \tag{7.186}
\end{aligned}$$

Donde debemos sustituir los valores de las funciones de estabilidad:

$$s_{\gamma ii} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) (2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \tag{7.187}$$

$$s_{\gamma ij} = s_{\gamma ji} = \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma) \left( \bar{S} - \gamma\delta\sqrt{\frac{1}{1 + \gamma}} \right)}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \tag{7.188}$$

$$s_{\gamma jj} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \tag{7.189}$$

$$\bar{S} = \sin(\delta \ln(1 + \gamma)) \tag{7.190}$$

$$\bar{C} = \cos(\delta \ln(1 + \gamma)) \tag{7.191}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma} - \frac{1}{4}} \tag{7.192}$$

Como hicimos en el caso de la estructura intraslacional (Tipo I.A), en la expresión (7.186) podemos cambiar los factores de rigidez relativa,  $G_A$  y  $G_B$ , por los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , los cuales son más convenientes:

$$\begin{aligned}
& \left[ s_{\gamma ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot \left[ s_{\gamma jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 + \\
& 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \cdot s_{\gamma ji} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \cdot s_{\gamma ij} - \\
& - \left[ s_{\gamma jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] \cdot 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) - \\
& - \left[ s_{\gamma ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) - \\
& - s_{\gamma ij} \cdot s_{\gamma ji} \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 = 0
\end{aligned} \tag{7.193}$$

Donde:

$$\eta_A^* = \frac{\left( \frac{EI}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}}{\left( \frac{EI}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( 1 + \frac{\Gamma_A}{2} \right) \left[ \left( \frac{EI}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{b2} \right]} \tag{7.194}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{c3}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{c3} + \left( 1 + \frac{\Gamma_B}{2} \right) \left[ \left( \frac{EI}{L} \right)_{b3} + \left( \frac{EI}{L} \right)_{b4} \right]} \tag{7.195}$$

### Carga de pandeo

En esta expresión (7.193), una vez fijados los valores del grado de ahussamiento,  $\gamma$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , se puede despejar el valor de  $\delta$ , y finalmente el valor de la carga de pandeo:

$$\delta = \sqrt{\left( \frac{kL}{\gamma} \right)^2 - \frac{1}{4}} \tag{7.196}$$

$$k^2 = \frac{P_p}{EI_a} \tag{7.197}$$

$$P_p = \frac{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 EI_a}{L^2} \tag{7.198}$$

Que como de costumbre podemos expresar según la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (7.199)$$

Donde:

$$m = \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 \quad (7.200)$$

De nuevo la carga de pandeo,  $P_p$ , dependerá del parámetro  $m$ , el cual será función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . En las Figuras (7.22 a 7.26) se muestran diferentes ábacos elaborados para el cálculo de  $m$  en función de estos tres parámetros, con valores de  $\gamma$  comprendidos entre 0 y 2, intervalo habitual de diseño. Se puede observar como los valores de  $m$  obtenidos para los puntos extremos  $((\eta_A^*, \eta_B^*) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (0, 1))$  coinciden con los valores obtenidos de la resolución de los casos de Euler - barra biempotrada con desplazamiento relativo entre extremos, empotrada-libre y libre-empotrada respectivamente - (ver capítulo 6). El caso concreto en el que  $\eta_A^* = \eta_B^* = 1$ , es un caso inestable que representaría una barra con sus dos extremos libres, sistema que se comporta como un mecanismo y consecuentemente, al no ser estable, la carga de pandeo es nula.

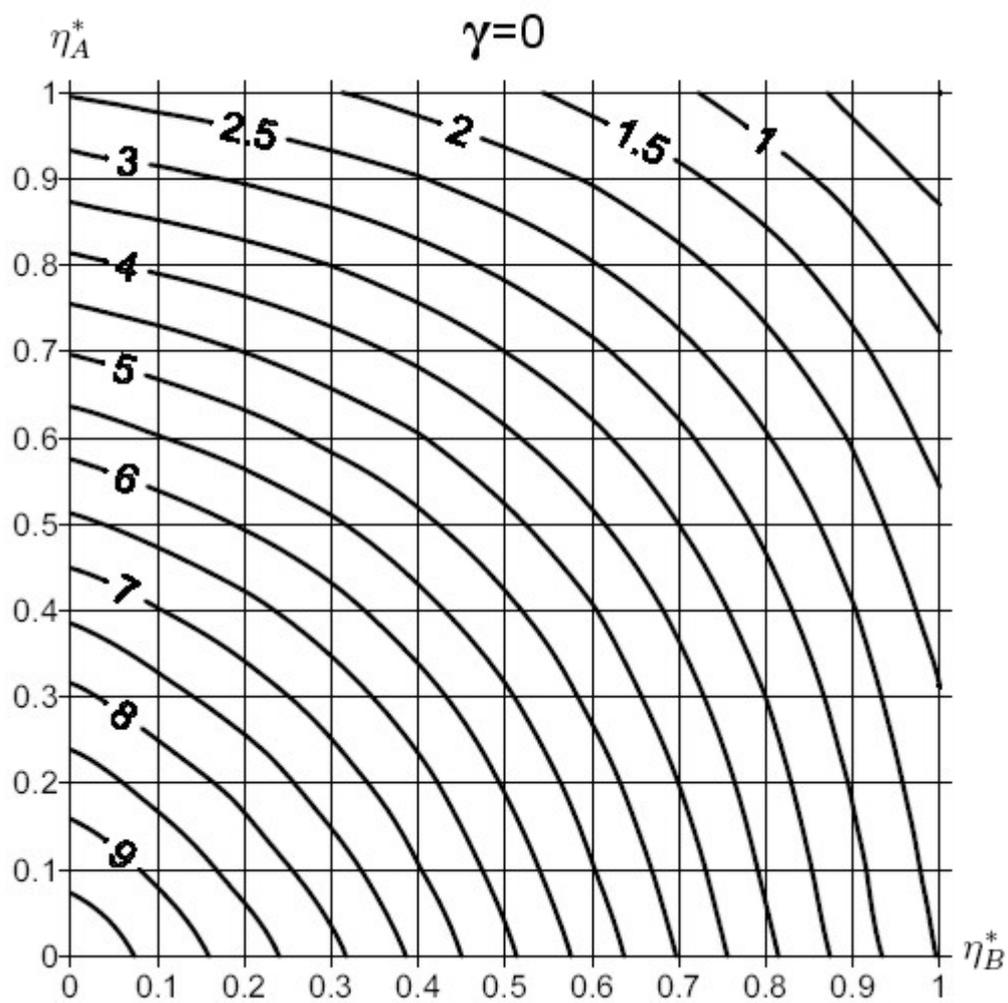


Figura 7.22: Estructura Tipo I-B. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

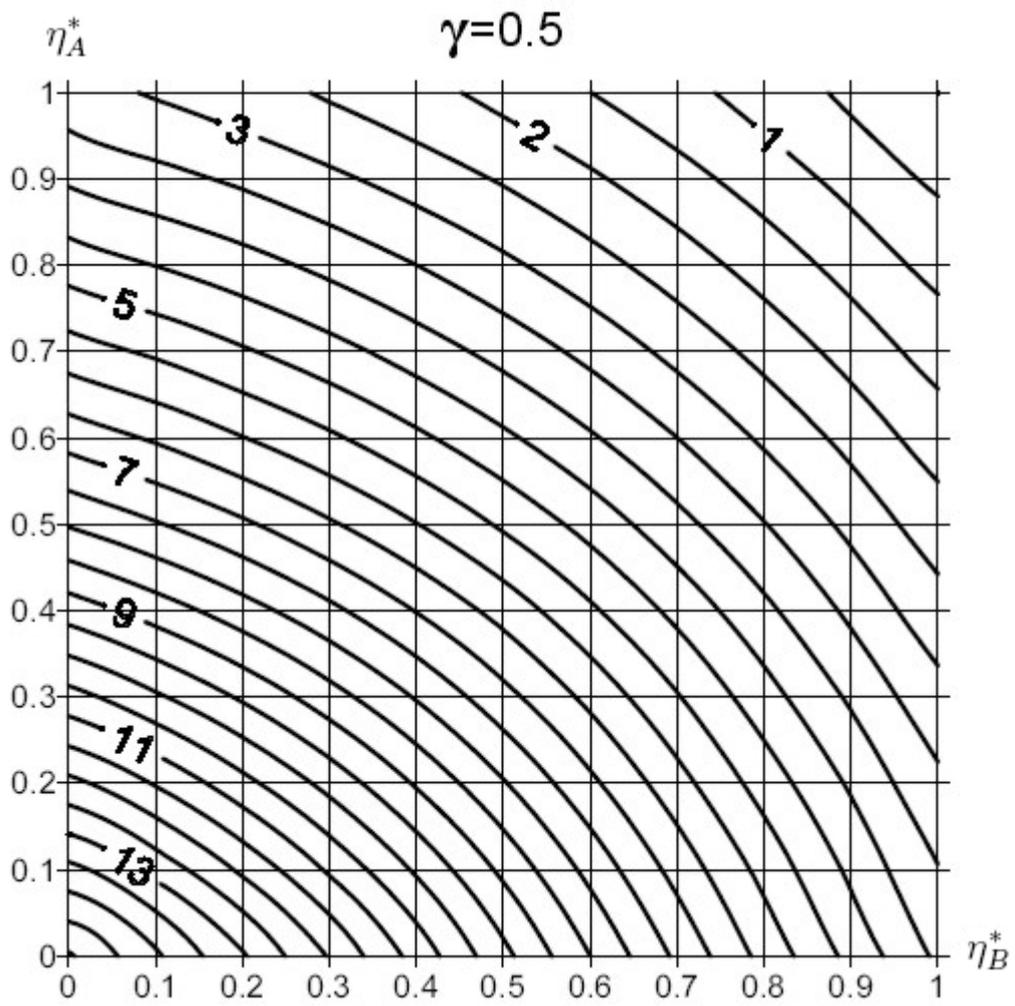


Figura 7.23: Estructura Tipo I-B. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

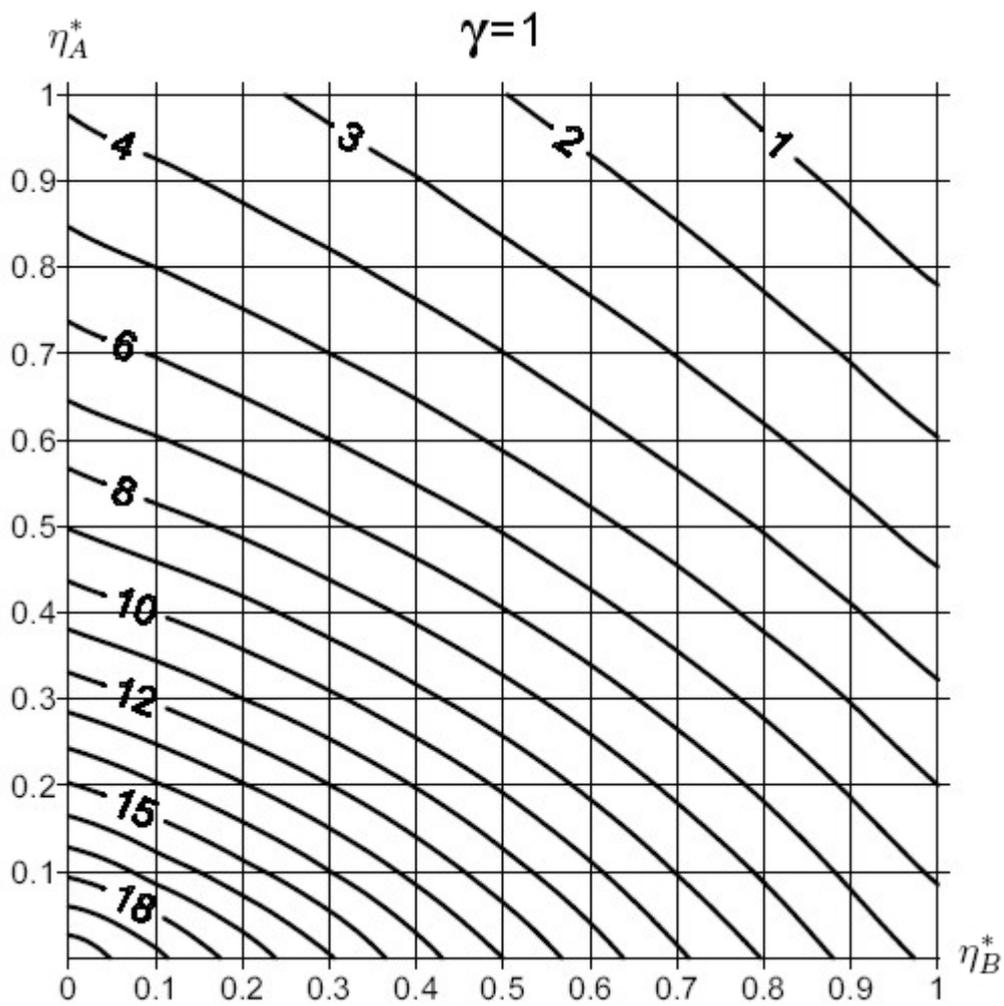


Figura 7.24: Estructura Tipo I-B. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

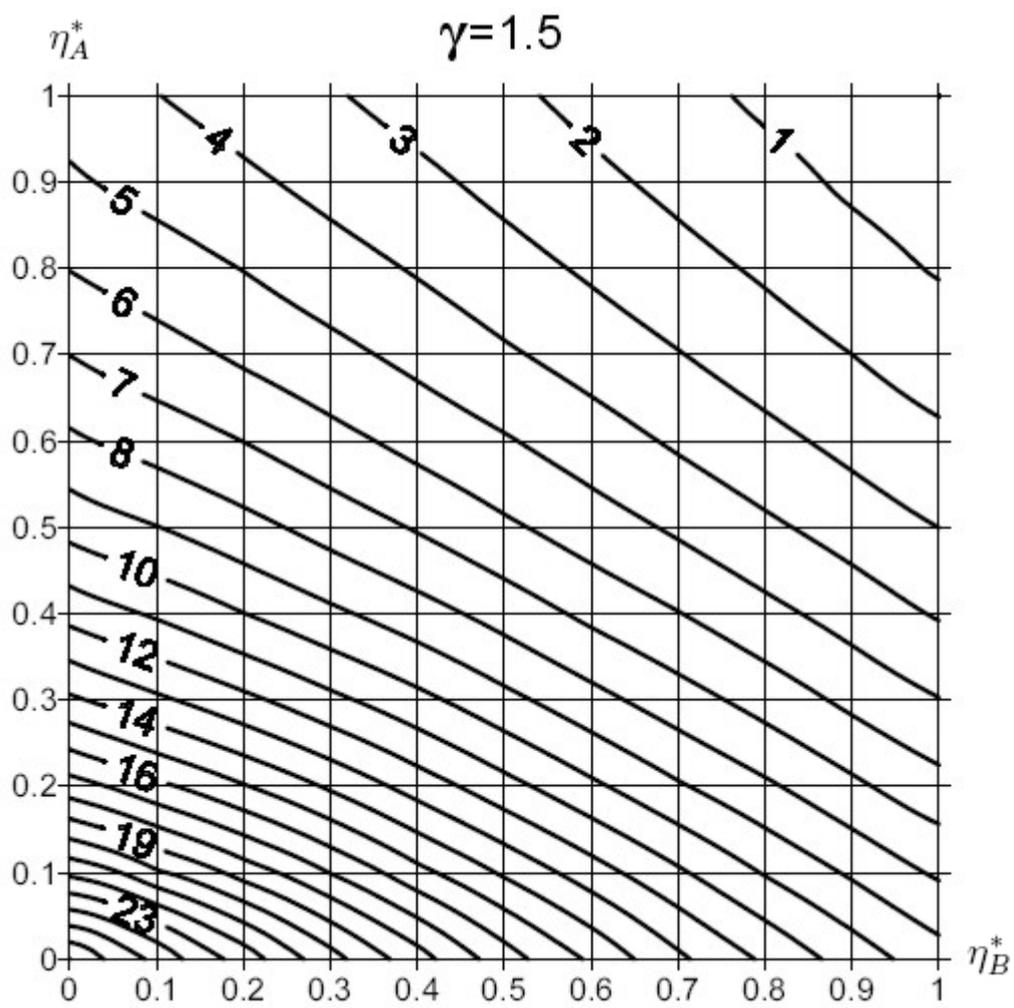


Figura 7.25: Estructura Tipo I-B. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

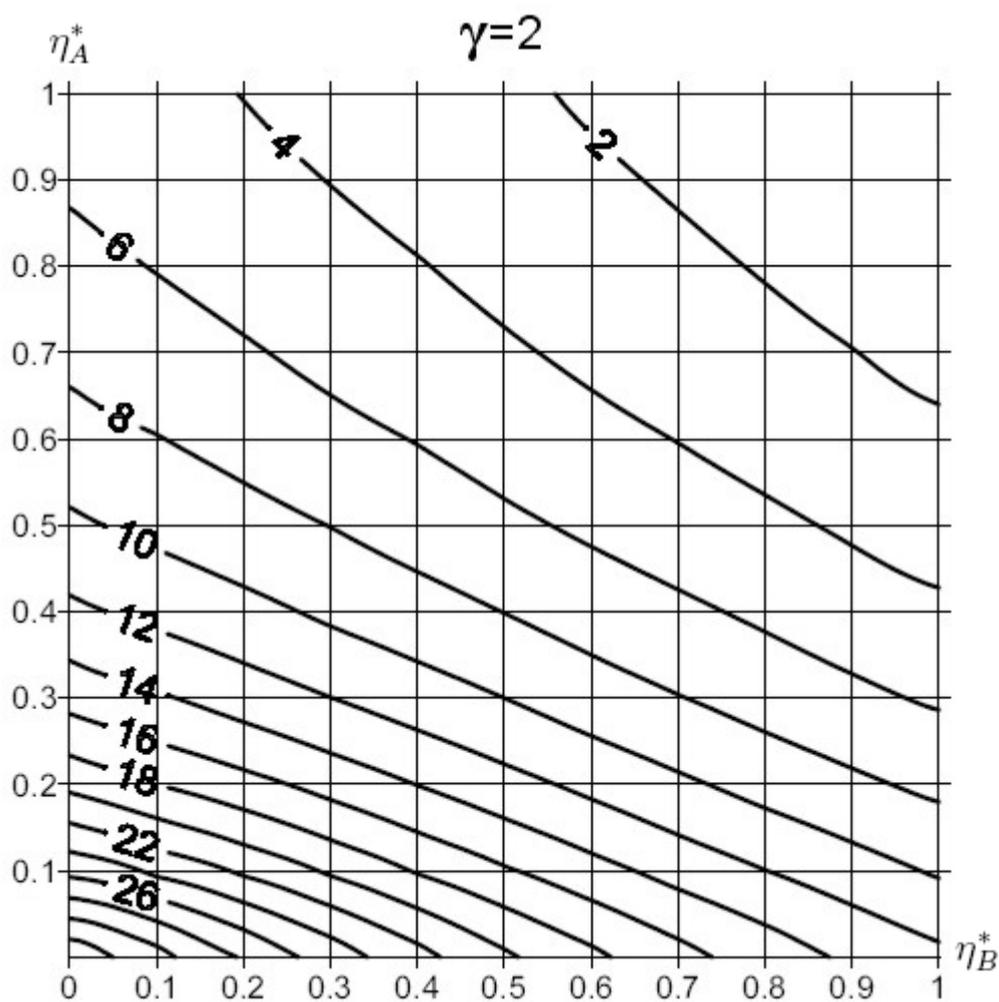


Figura 7.26: Estructura Tipo I-B. Valores de  $m$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

### Longitud de pandeo

Para hallar la longitud de pandeo de la columna en estudio, es necesario recurrir a la expresión (7.55), sección 7.1.2:

$$\frac{\sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\delta \left(\ln(1+\gamma) - \ln \frac{x}{a}\right)\right)} = \sqrt{1+\gamma} \frac{M_B}{M_A} = \sqrt{1+\gamma} \frac{R_{kB}\theta_B}{R_{kA}\theta_A} \quad (7.201)$$

Y como ya hemos deducido anteriormente en (7.173) y (7.174), tenemos que:

$$R_{kA} = 4 \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \quad (7.202)$$

$$R_{kB} = 4 \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \quad (7.203)$$

Por otra parte, no es posible conocer los giros  $\theta_A$  y  $\theta_B$  de manera explícita, pero si es posible conocer la relación entre ambos, lo cual es suficiente para nuestro objetivo. El procedimiento consiste en igualar el momento interno con el momento externo a cada nudo:

$$M_A = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left[ s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \frac{\Delta}{L_{c2}} \right] = -R_{kA} \theta_A \quad (7.204)$$

$$M_B = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left[ s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{L_{c2}} \right] = -R_{kB} \theta_B \quad (7.205)$$

Sustituyendo  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$  por sus respectivos valores, queda:

$$s_{\gamma ii} \theta_A + s_{\gamma ij} \theta_B - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \frac{\Delta}{L_{c2}} = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \theta_A \quad (7.206)$$

$$s_{\gamma ji} \theta_A + s_{\gamma jj} \theta_B - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{L_{c2}} = -4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \theta_B \quad (7.207)$$

Introduciendo la relación entre los giros:

$$\Gamma_{BA} = \frac{\theta_B}{\theta_A} \quad (7.208)$$

Podemos reescribir las ecuaciones anteriores:

$$s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} \Gamma_{BA} - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij}) \frac{\Delta}{\theta_A L_{c2}} = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \quad (7.209)$$

$$s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj} \Gamma_{BA} - (s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{\theta_A L_{c2}} = -4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA} \quad (7.210)$$

Si sumamos ambas ecuaciones, se obtiene la ecuación agrupada:

$$\Gamma_{BA} (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) + s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji} - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{\Delta}{\theta_A L_{c2}} =$$

$$= -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) - 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA} \quad (7.211)$$

Por otra parte, sabemos por la expresión (7.183) que:

$$\frac{\Delta}{\theta_A L c_2} = \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA}}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} \quad (7.212)$$

Que podemos sustituir en la ecuación (7.211):

$$\begin{aligned} \Gamma_{BA}(s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) + s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji} - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA}}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} = \\ = -4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) - 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \Gamma_{BA} \end{aligned} \quad (7.213)$$

De donde podemos despejar la incógnita:

$$\begin{aligned} \Gamma_{BA} = - \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji}) - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2}}{4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2}} \end{aligned} \quad (7.214)$$

Y sustituyendo (7.202), (7.203) y (7.214) en la ecuación (7.201), queda:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right)}{\sin \left( \delta \left( \ln(1 + \gamma) - \ln \frac{x}{a} \right) \right)} = \\ = \frac{\left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji}) - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} \right]}{(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) - (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} \right]} \end{aligned} \quad (7.215)$$

Ahora ya podemos despejar  $x$  de esta ecuación:

$$x = a \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + n\pi \right] \right] =$$

$$= \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + n\pi \right] \right] \quad (7.216)$$

Donde:

$$C_1 = - \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ji}) \right] + \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \left[ (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} \right] \quad (7.217)$$

$$C_2 = (1 + \gamma)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) + (s_{\gamma ij} + s_{\gamma jj}) \right] - (1 + \gamma)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \left[ (s_{\gamma ii} + s_{\gamma ij} + s_{\gamma ji} + s_{\gamma jj}) \frac{4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right)}{\left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2} \right] \quad (7.218)$$

La distancia entre puntos de inflexión o longitud de pandeo,  $L_k$ , será igual al incremento de  $x$  entre  $n$  y  $n + 1$  en el entorno del intervalo  $x \in [a, a + L]$ . En este caso tenemos  $n = 0$  y  $n = 1$ . Según esto:

$$\begin{aligned} L_k &= \Delta x = x_1 - x_0 = \\ &= \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) + \pi \right] \right] - \\ &\quad - \frac{L}{\gamma} \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] = \\ &= \frac{L}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] \quad (7.219) \end{aligned}$$

Y el coeficiente de esbeltez vendrá dado por:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (7.220)$$

$$\beta_\gamma = \beta(\gamma) =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma))}} \right) \right] \right] \quad (7.221)$$

En las Figuras (7.27 a 7.31) se muestran diferentes ábacos elaborados para el cálculo de  $\beta_\gamma$  en función de  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$  y  $\gamma$ , con valores de  $\gamma$  comprendidos entre 0 y 2, al igual que se hizo para el cálculo de  $m$ . Como  $\beta_\gamma$  tiende a infinito cuando nos acercamos a las coordenadas  $\eta_A^* = \eta_B^* = 1$ , se ha representado en los ábacos mencionados el valor invertido,  $1/\beta_\gamma$ , lo que nos permite una mayor calidad en la representación gráfica. El ábaco 7.27 representa el caso particular para barra de inercia constante, y se puede encontrar en el Eurocódigo 3 [13] (Anexo E).

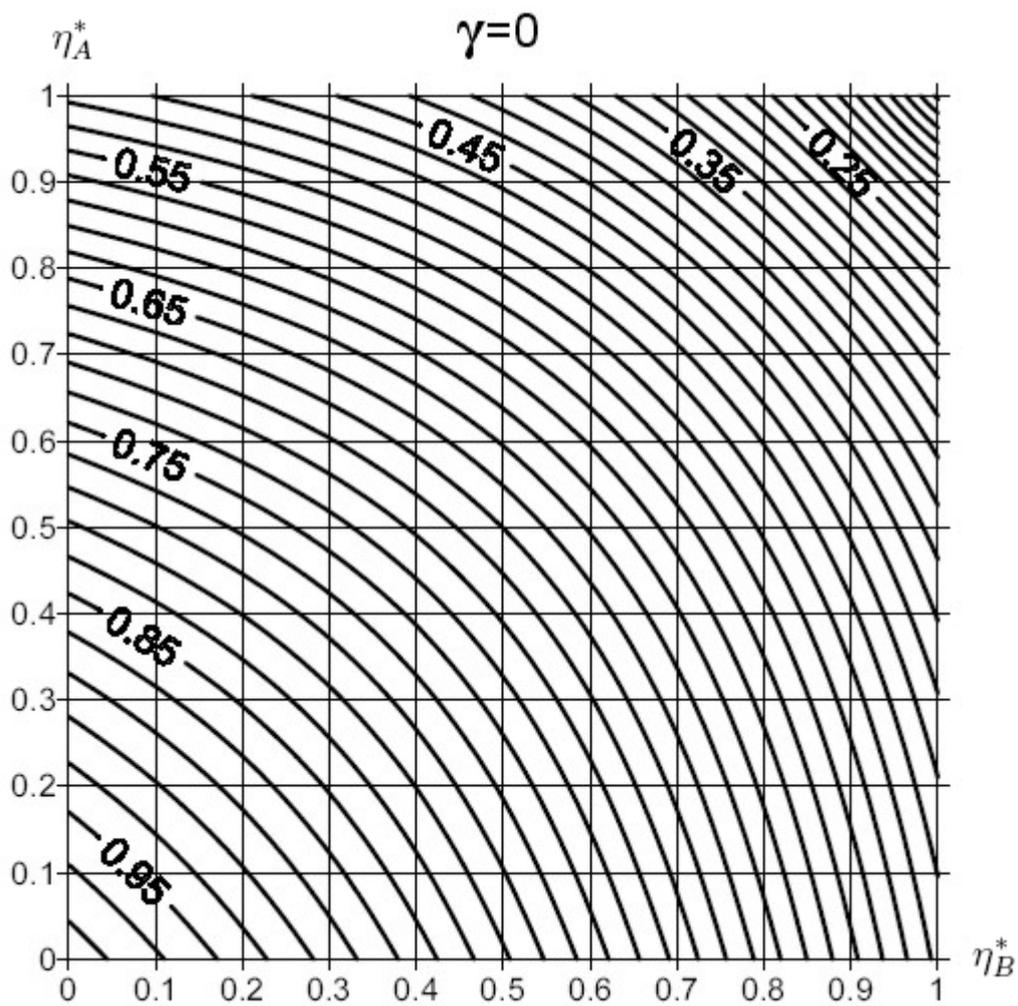


Figura 7.27: Estructura Tipo I-B. Valores de  $\beta_\gamma^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

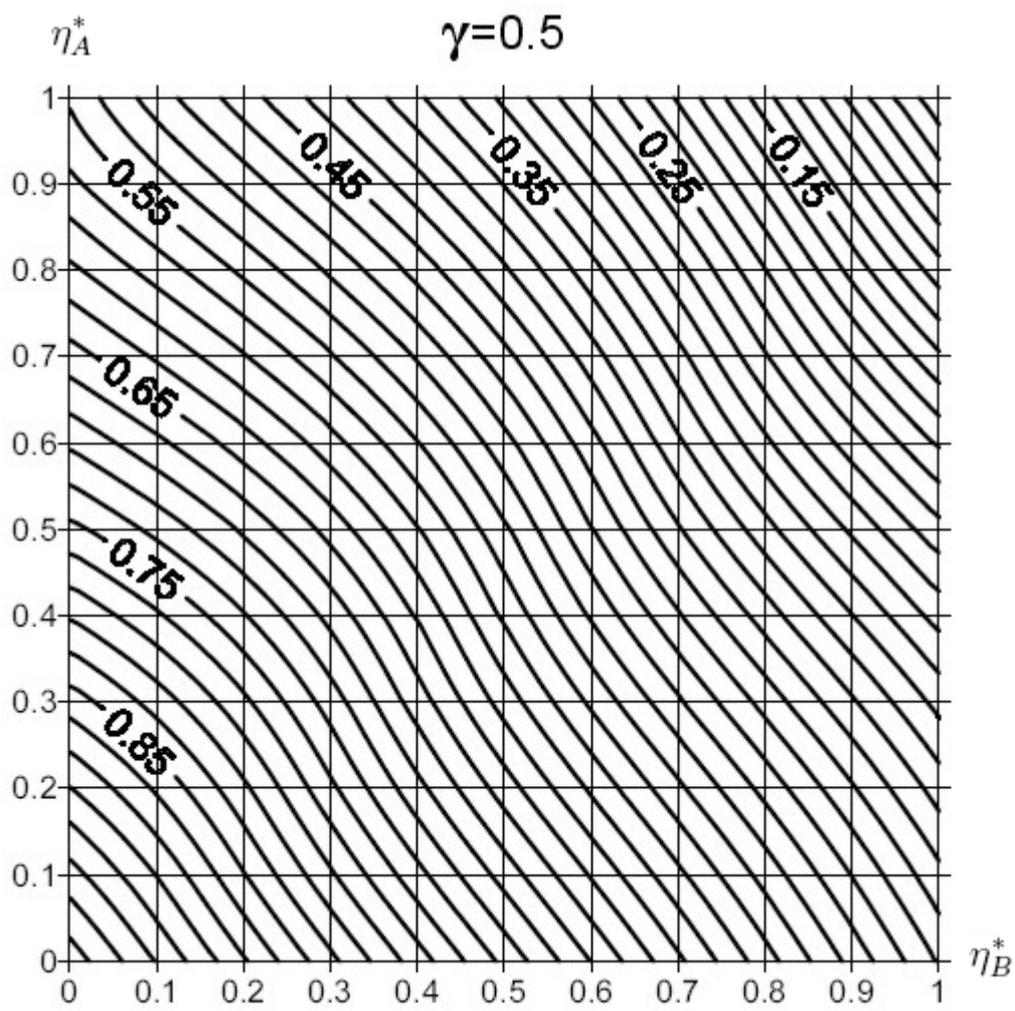


Figura 7.28: Estructura Tipo I-B. Valores de  $\beta_\gamma^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

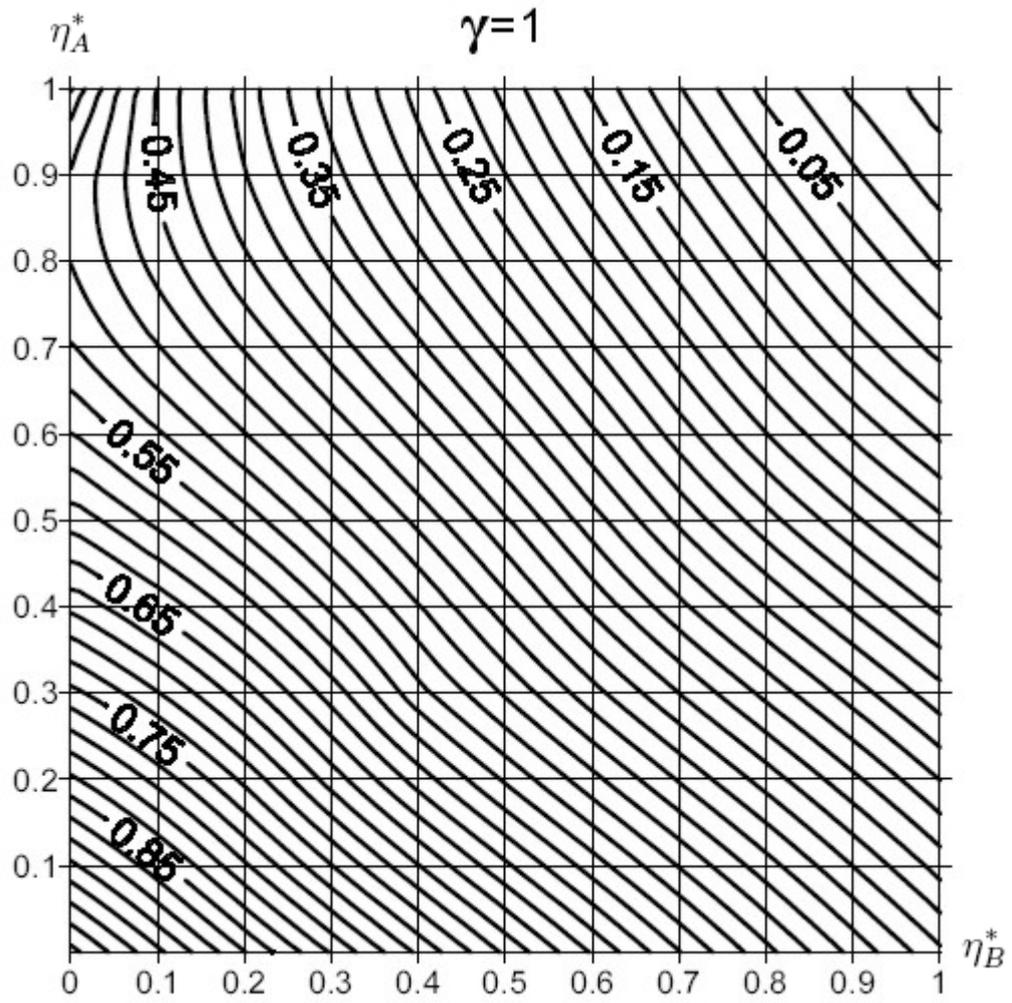


Figura 7.29: Estructura Tipo I-B. Valores de  $\beta_\gamma^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

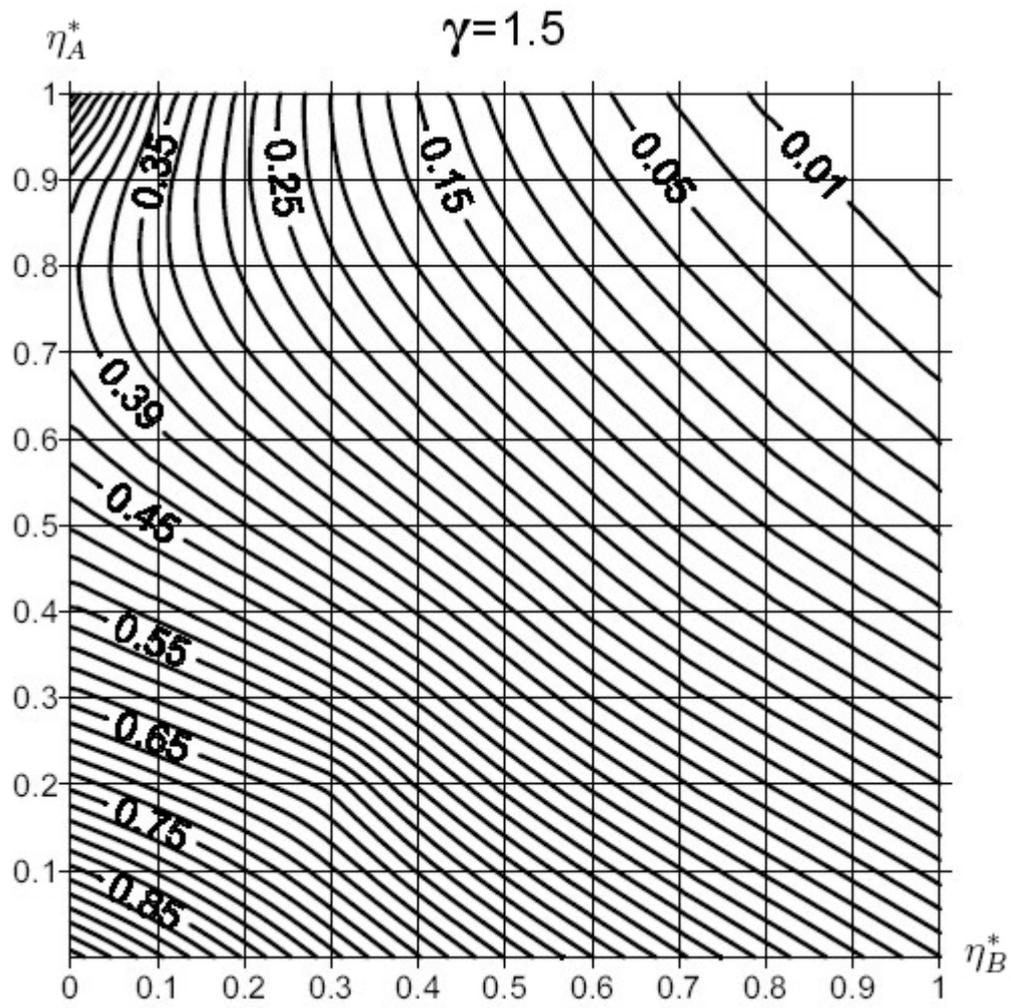


Figura 7.30: Estructura Tipo I-B. Valores de  $\beta_\gamma^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

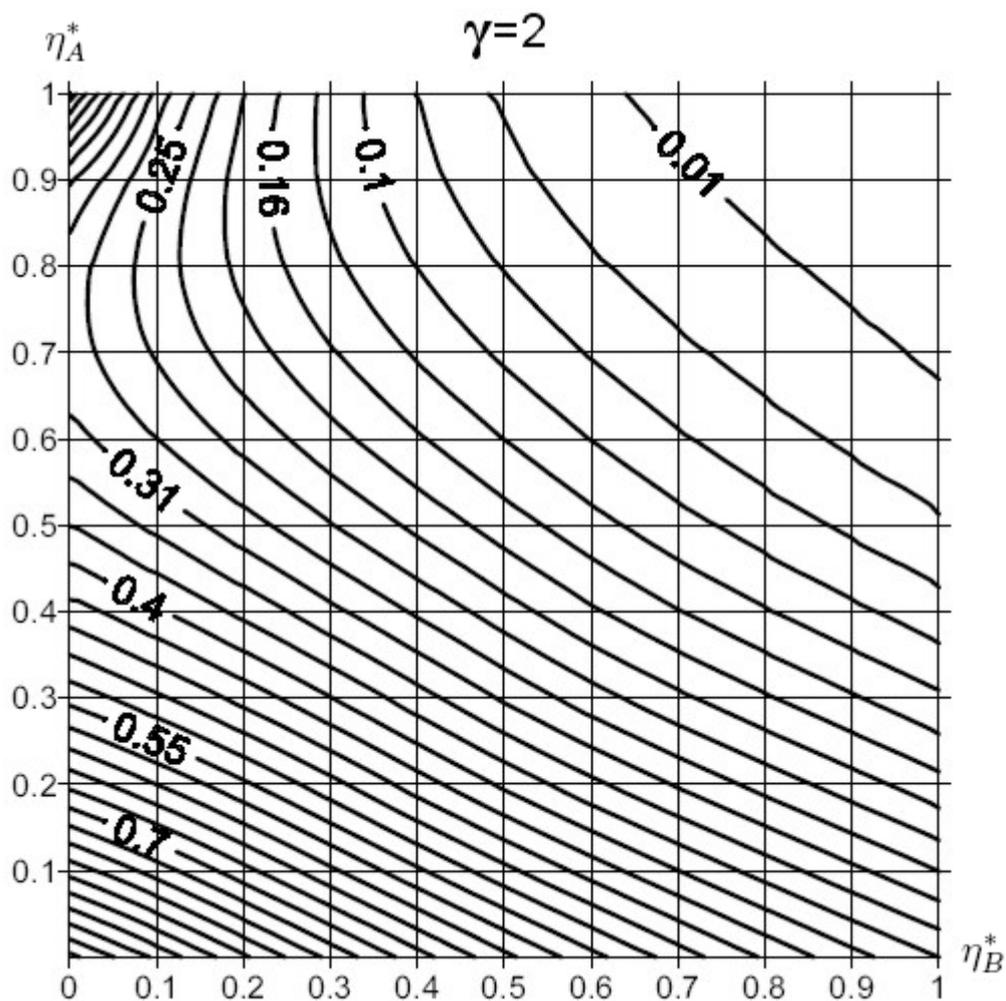


Figura 7.31: Estructura Tipo I-B. Valores de  $\beta_\gamma^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

### Columna equivalente

Para hallar el momento de inercia de la columna equivalente, aplicamos la ecuación de equivalencia:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (7.222)$$

De donde el momento de inercia equivalente resulta ser:

$$I_{eq} = bI_a \quad (7.223)$$

Siendo:

$$b = m \left( \frac{\beta_\gamma}{\pi} \right)^2 \quad (7.224)$$

En las Figuras (7.32 a 7.35) se muestran los valores de  $b^{-1}$  en ábacos similares a los elaborados para  $m$  y  $\beta_\gamma$ .

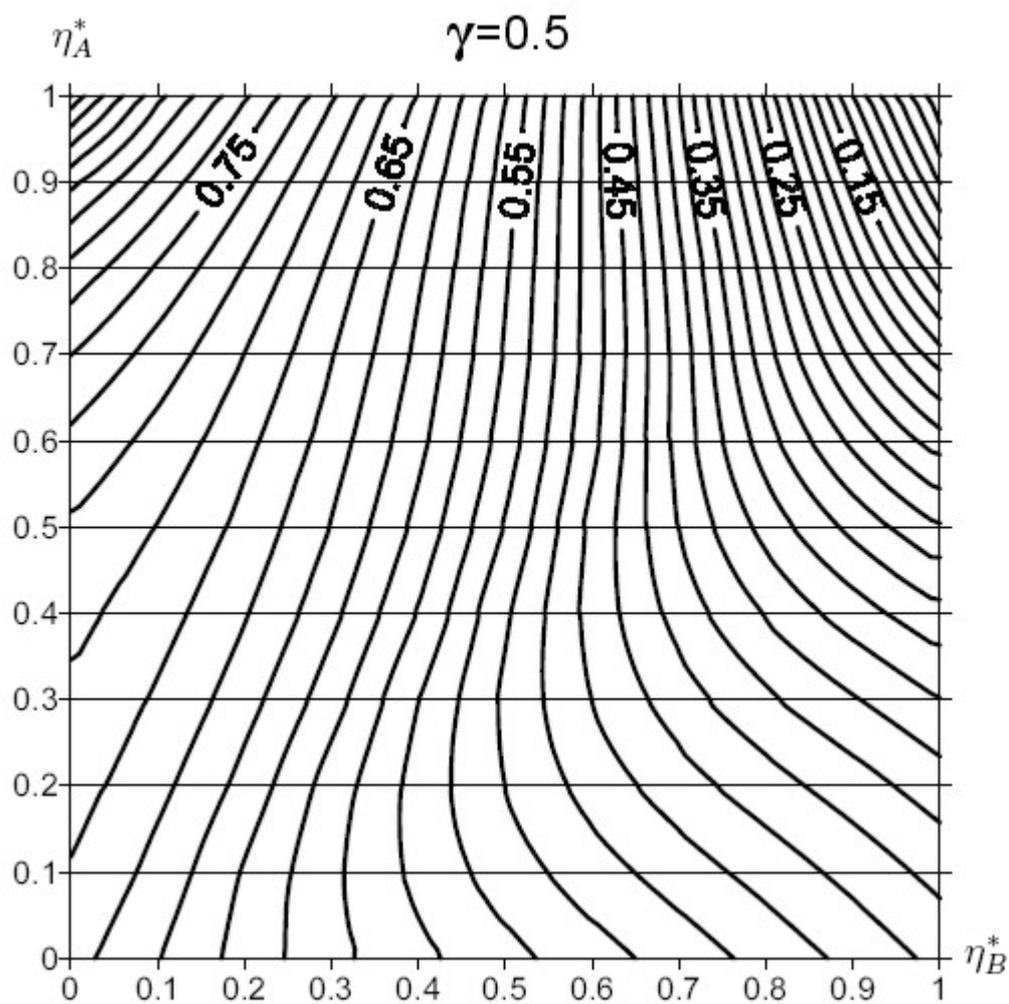


Figura 7.32: Estructura Tipo I-B. Valores de  $b^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

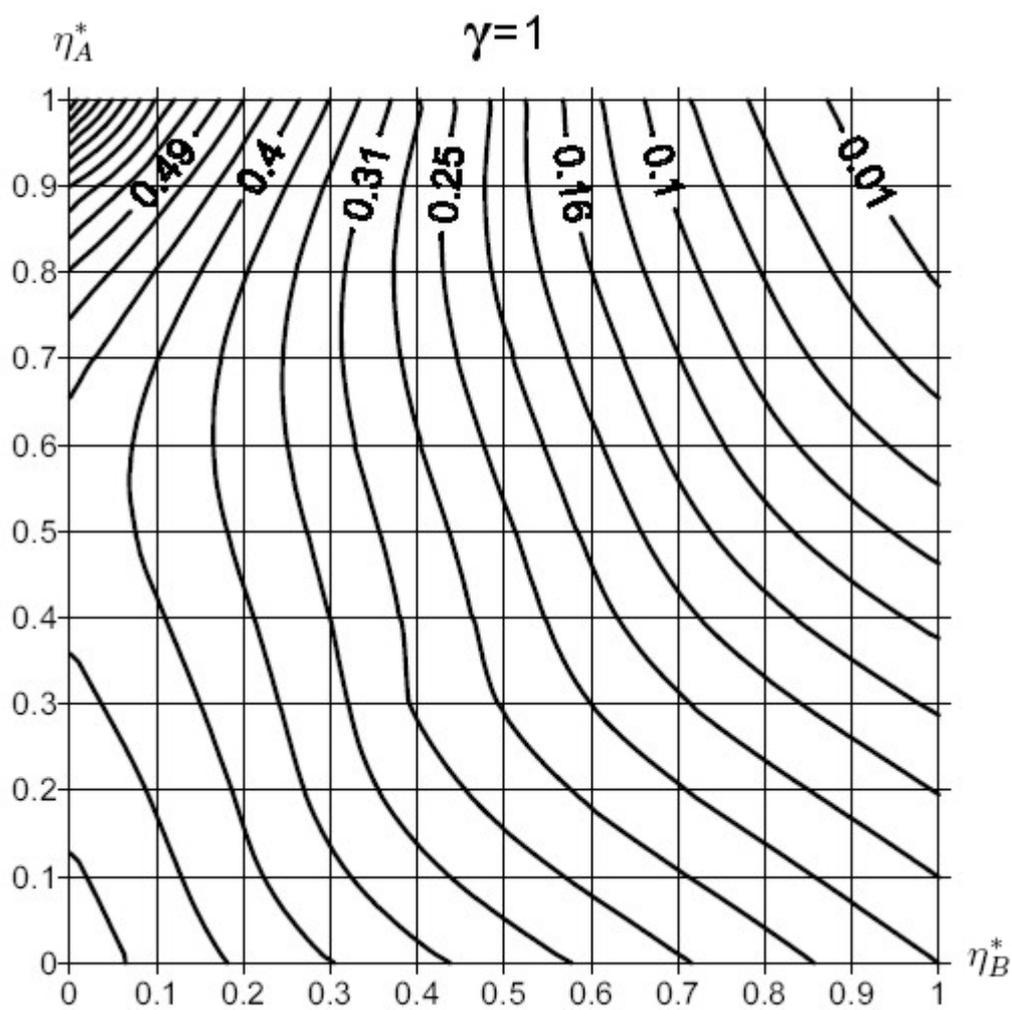


Figura 7.33: Estructura Tipo I-B. Valores de  $b^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

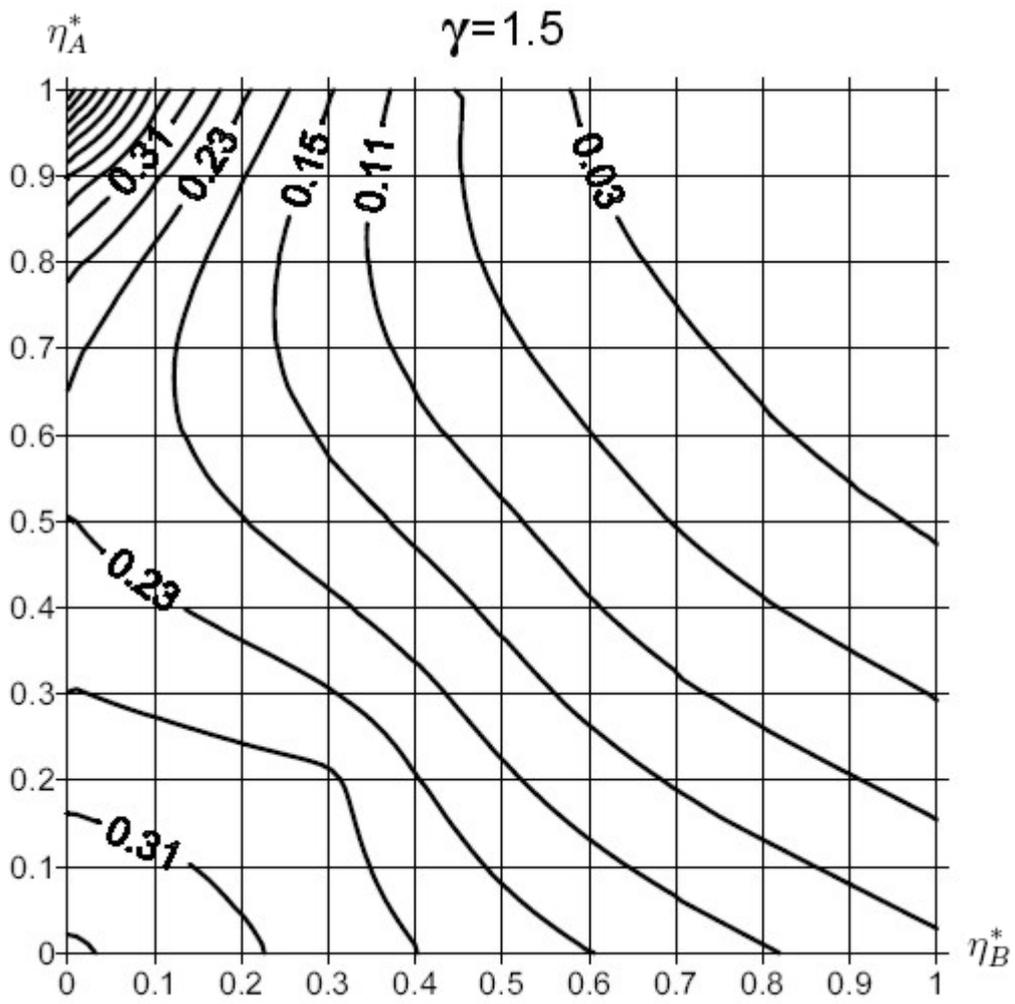


Figura 7.34: Estructura Tipo I-B. Valores de  $b^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

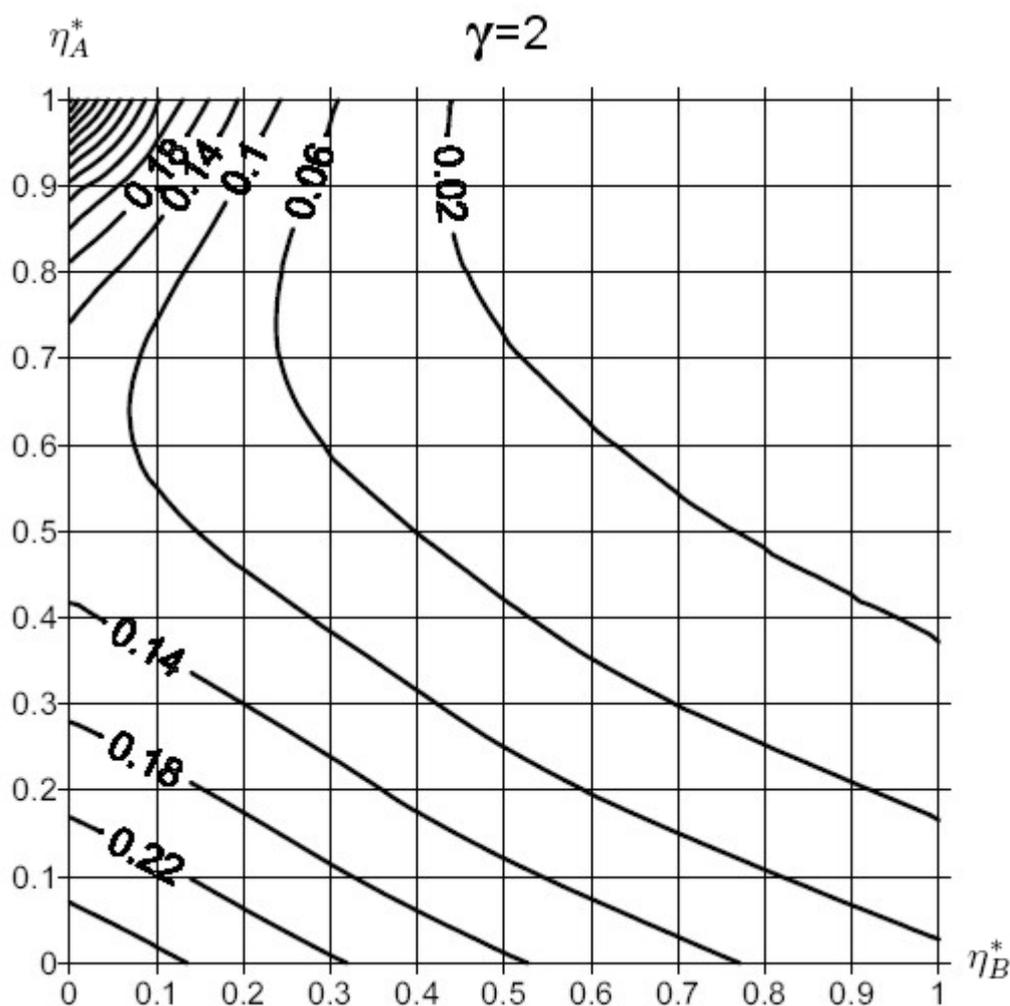


Figura 7.35: Estructura Tipo I-B. Valores de  $b^{-1}$  en función de  $\gamma$ ,  $\eta_A^*$ ,  $\eta_B^*$

Una vez caracterizado el comportamiento de la columna en estudio dentro de la estructura general de la Figura 7.21, analizaremos a continuación algunos casos particulares de interés práctico.

### Estructura Tipo I-B.1: Nudos C y D empotrados

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.36. Los nudos C y D se encuentran empotrados, de tal manera que el giro no está permitido, y por tanto:

$$\theta_C = \theta_D = 0 \quad (7.225)$$

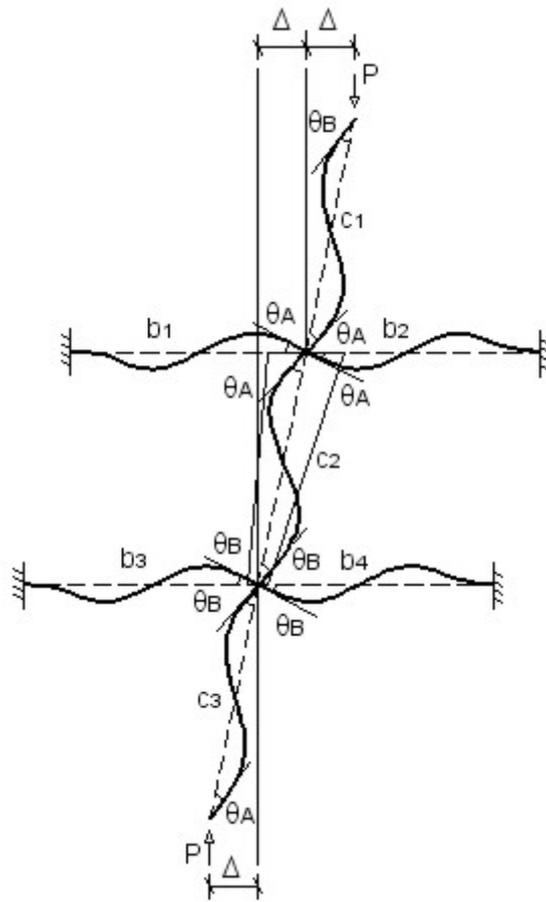


Figura 7.36: Estructura Tipo I-B.1

En consecuencia:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 0 \quad (7.226)$$

Y los coeficientes de distribución (7.187) y (7.188), tomarían los siguientes valores:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2}} \quad (7.227)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4}} \quad (7.228)$$

**Estructura Tipo I-B.2: Nudos C y D articulados**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.37. Los nudos C y D se encuentran articulados, de tal manera que el giro es la mitad del de los nudos A y B, es decir:

$$\theta_C = \frac{1}{2}\theta_A \tag{7.229}$$

$$\theta_D = \frac{1}{2}\theta_B \tag{7.230}$$

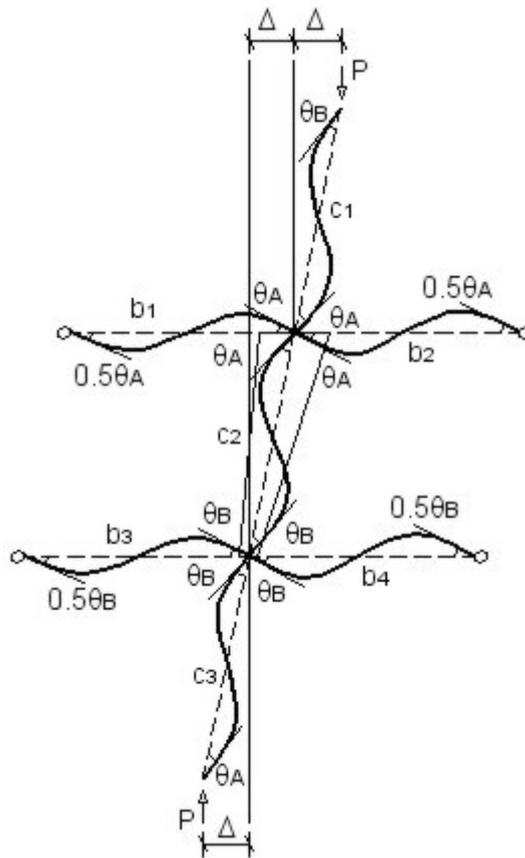


Figura 7.37: Estructura Tipo I-B.2

Según esto, tenemos que:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \frac{1}{2} \tag{7.231}$$

Siendo entonces los coeficientes de distribución:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{5}{4} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} \right]} \quad (7.232)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \frac{5}{4} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} \right]} \quad (7.233)$$

**Estructura Tipo I-B.3: Nudos C y D con giros iguales a los nudos A y B**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.38. Los nudos *C* tienen giros de igual valor al del nudo *A*, al igual que los nudos *D* respecto del *B*:

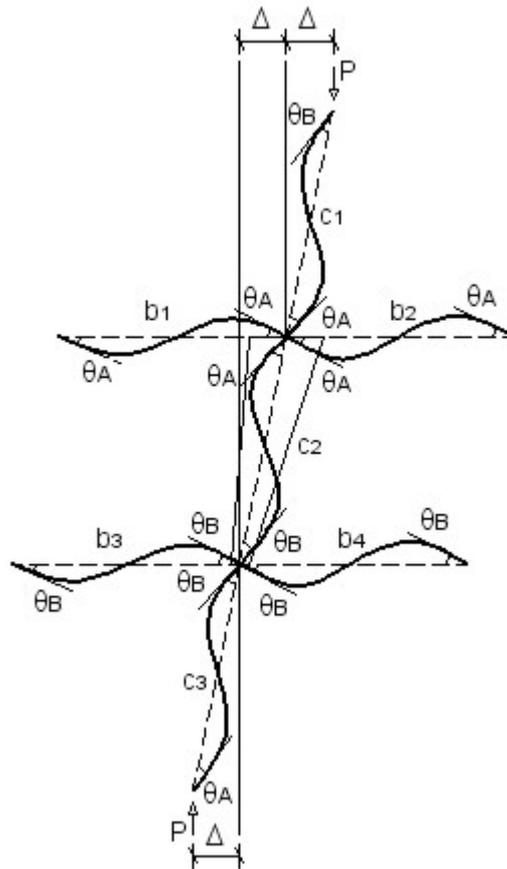


Figura 7.38: Estructura Tipo I-B.3

$$\theta_C = \theta_A \quad (7.234)$$

$$\theta_D = \theta_B \quad (7.235)$$

Y por tanto:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 1 \quad (7.236)$$

Con lo que los coeficientes de distribución en este caso quedan de la siguiente forma:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b2} \right]} \quad (7.237)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{c3} + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{EI}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI}{L}\right)_{b4} \right]} \quad (7.238)$$

## 7.2.2. Sistema formado por barras de inercia variable (Estructura Tipo II)

### 7.2.2.1. Estructura Tipo II-A (Intraslacional)

El esquema de análisis se muestra en la Figura 7.39.

Tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- Los nudos de conexión entre barras son rígidos, es decir, todas las barras que concurren en el nudo experimentan el mismo giro.
- La estructura es intraslacional, es decir, no hay posibilidad de desplazamiento transversal relativo entre los nudos.
- Las barras pandean en simple curvatura si la estructura es intraslacional, demostrado por diversos autores [8].
- Existe una carga axial,  $P$ , que comprime por sus extremos a las columnas  $c1$  y  $c3$ .
- Las vigas no conducen carga axial.
- Los giros en los extremos alejados de las vigas (C y D) no son iguales a los giros en los extremos de las columnas (A y B).
- Los giros en los extremos de las columnas son alternados, según se alternan los nudos (A y B).

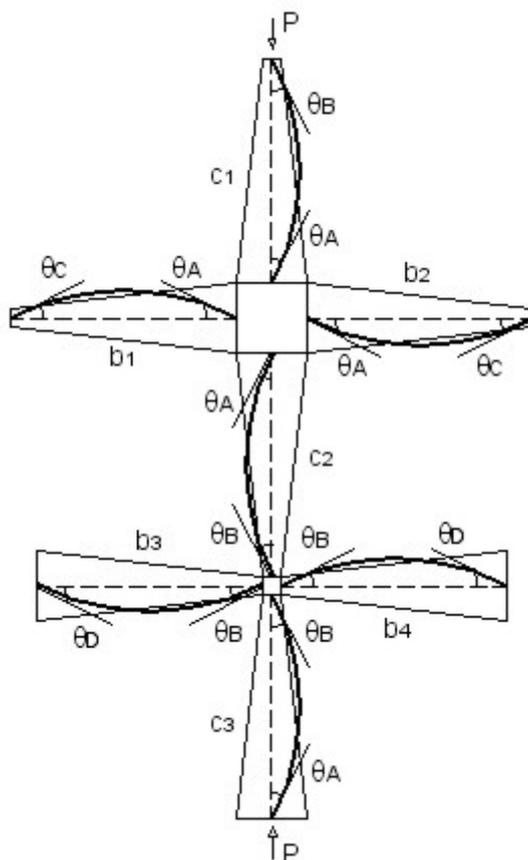


Figura 7.39: Estructura Tipo II-A

- Consideraremos que, por lo general, las columnas tienen un grado de ahusamiento  $\gamma_c$ , diferente del de las vigas, al que denominaremos  $\gamma_b$ .
- No se considera el peso propio de las barras.

Nuestro objetivo es estudiar como pandea la columna  $c_2$ , de longitud  $L$ , comprendida entre los nudos  $A$  y  $B$ , cuya inercia es variable según la expresión de Timoshenko (6.2), cumpliéndose que  $I_A = I_a(1 + \gamma)^2$ ,  $I_B = I_a$ .

Para el análisis emplearemos las ecuaciones pendiente-desplazamiento deducidas en la sección 7.1.1.1, aplicadas en los nudos  $A$  y  $B$ , teniendo en cuenta que para las columnas se usarán las funciones de estabilidad,  $s_{\gamma_c}$ , y para las vigas, las cuales no conducen axial, se usarán los coeficientes de rigidez,  $z_{\gamma_b}$ :

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} (s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B) \quad (7.239)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} (s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B) \quad (7.240)$$

$$(M_B)_{c2} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} (s_{\gamma_{cji}}\theta_A + s_{\gamma_{cjj}}\theta_B) \quad (7.241)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3} (s_{\gamma_{cji}}\theta_A + s_{\gamma_{cjj}}\theta_B) \quad (7.242)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}}\theta_A - z_{\gamma_{bij}}\theta_C) = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A \quad (7.243)$$

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A} \quad (7.244)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}}\theta_A - z_{\gamma_{bij}}\theta_C) = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A \quad (7.245)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} (z_{\gamma_{bjj}}\theta_B - z_{\gamma_{bji}}\theta_D) = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} (z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)\theta_B \quad (7.246)$$

$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B} \quad (7.247)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4} (z_{\gamma_{bjj}}\theta_B - z_{\gamma_{bji}}\theta_D) = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4} (z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)\theta_B \quad (7.248)$$

La condición de equilibrio en el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (7.249)$$

Despejando el momento correspondiente a la columna  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (7.250)$$

Si sustituimos en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros extremos, tenemos que:

$$(M_A)_{c2} = - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A) \theta_A - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A) \theta_A - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} (s_{\gamma_{cii}} \theta_A + s_{\gamma_{cij}} \theta_B) \quad (7.251)$$

Por otra parte, de la ecuación (7.240) tenemos que:

$$s_{\gamma_{cii}} \theta_A + s_{\gamma_{cij}} \theta_B = \frac{(M_A)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}} \quad (7.252)$$

Sustituyendo (7.252) en (7.251) queda:

$$(M_A)_{c2} = -(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}} \theta_A \quad (7.253)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , obtenemos:

$$(M_B)_{c2} = -(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}} \Gamma_B) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3}} \theta_B \quad (7.254)$$

Para simplificar, introduciremos los factores de rigidez relativa de los nudos:

$$G_A = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2}} \quad (7.255)$$

$$G_B = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4}} \quad (7.256)$$

Por lo que se obtiene:

$$(M_A)_{c2} = -\frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A) \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \theta_A = -R_{kA} \theta_A \quad (7.257)$$

$$(M_B)_{c2} = -\frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B) \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \theta_B = -R_{kB} \theta_B \quad (7.258)$$

Y ya quedan por tanto definidas las constantes elásticas o rigideces de los nudos:

$$R_{kA} = \frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A) \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \quad (7.259)$$

$$R_{kB} = \frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B) \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \quad (7.260)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (7.240) y (7.257) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (7.241) y (7.258) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[ s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \right] \theta_A + s_{\gamma_{cij}} \theta_B = 0 \quad (7.261)$$

$$s_{\gamma_{cji}} \theta_A + \left[ s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)}{G_B} \right] \theta_B = 0 \quad (7.262)$$

Las cuales podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} & s_{\gamma_{cij}} \\ s_{\gamma_{cji}} & s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)}{G_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.263)$$

En el momento de producirse el pandeo, debemos obtener una solución distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} & s_{\gamma_{cij}} \\ s_{\gamma_{cji}} & s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)}{G_B} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.264)$$

Esto nos proporciona la ecuación característica de la estructura:

$$\left[ s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \right] \cdot \left[ s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B)}{G_B} \right] - s_{\gamma_{cij}} \cdot s_{\gamma_{cji}} = 0 \quad (7.265)$$

Donde debemos sustituir los valores de las funciones de estabilidad y de los coeficientes de rigidez de las barras:

$$s_{\gamma_c ii} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma_c(1 + \gamma_c) (2\gamma_c\delta\bar{C} - (2 + \gamma_c)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma_c)\bar{C} + \gamma_c(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma_c})} \quad (7.266)$$

$$s_{\gamma_c ij} = s_{\gamma_c ji} = \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma_c(1 + \gamma_c) \left( \bar{S} - \gamma_c\delta\sqrt{\frac{1}{1 + \gamma_c}} \right)}{2(4\delta(2 + \gamma_c)\bar{C} + \gamma_c(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma_c})} \quad (7.267)$$

$$s_{\gamma_c jj} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma_c (2\gamma_c\delta\bar{C} - (2 + \gamma_c)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma_c)\bar{C} + \gamma_c(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma_c})} \quad (7.268)$$

$$z_{\gamma_b ii} = \frac{\gamma_b(1 + \gamma_b) (2(1 + \gamma_b) \ln(1 + \gamma_b) - \gamma_b(2 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b) \ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.269)$$

$$z_{\gamma_b ij} = z_{\gamma_b ji} = \frac{\gamma_b(1 + \gamma_b) (2\gamma_b - (2 + \gamma_b) \ln(1 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b) \ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.270)$$

$$z_{\gamma_b jj} = \frac{\gamma_b (2(1 + \gamma_b) \ln(1 + \gamma_b) - \gamma_b(2 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b) \ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.271)$$

$$\bar{S} = \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c)) \quad (7.272)$$

$$\bar{C} = \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c)) \quad (7.273)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma_c} - \frac{1}{4}} \quad (7.274)$$

De nuevo sustituiremos los factores de rigidez relativa,  $G_A$  y  $G_B$ , de la expresión (7.265) por los coeficientes de distribución que hemos usado en las secciones anteriores,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . Según esto:

$$\left[ s_{\gamma_c ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot \left[ s_{\gamma_c jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] - s_{\gamma_c ij} \cdot s_{\gamma_c ji} = 0 \quad (7.275)$$

Donde:

$$\eta_A^* = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{z_{\gamma_b ii} - z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4} \right) \left[ \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} \right]} \quad (7.276)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj} - z_{\gamma_b ji} \Gamma_B}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.277)$$

Se puede observar que con las modificaciones realizadas, hemos conseguido que la ecuación característica (7.275) sea idéntica a la ecuación (7.108), correspondiente a la estructura Tipo I-A de la sección 7.2.1.1. Esto permite usar las soluciones halladas para esa estructura y aplicarlas a esta nueva estructura Tipo II-A. Obviamente, lo que hemos hecho es englobar las modificaciones en los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , donde se incluyen las características geométricas y elásticas de las vigas y columnas concurrentes en los nudos  $A$  y  $B$ . Pero para conocer los coeficientes de distribución, debemos saber el valor los coeficientes de rigidez de las vigas,  $z_{\gamma_b}$ , los cuales dependen del coeficiente de ahusamiento de dichas vigas,  $\gamma_b$ . En el Cuadro 7.1 se muestran diferentes valores de dichos coeficientes de rigidez en función del ahusamiento.

### Carga de pandeo

En esta expresión (7.275), una vez fijados los valores del grado de ahusamiento de las columnas,  $\gamma_c$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , se puede despejar el valor de  $\delta$ , y finalmente el valor de la carga de pandeo:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma_c}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.278)$$

$$k^2 = \frac{P_p}{EI_a} \quad (7.279)$$

$$P_p = \frac{\left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) \gamma_c^2 EI_a}{L^2} \quad (7.280)$$

Que como de costumbre podemos expresar en la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (7.281)$$

Donde:

$$m = \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) \gamma_c^2 \quad (7.282)$$

Y como se ha comentado anteriormente, para conocer el valor de  $m$  podemos usar los ábacos ya calculados para la estructura Tipo I-A (Figuras 7.4 a 7.8), o si se quiere más precisión, las tablas del Anejo A.

$\gamma_b$	$z_{\gamma_b ii}$	$z_{\gamma_b ij} = z_{\gamma_b ji}$	$z_{\gamma_b jj}$
0.00	4.00	2.00	4.00
0.10	4.62	2.20	4.20
0.20	5.27	2.40	4.39
0.30	5.95	2.61	4.58
0.40	6.67	2.81	4.76
0.50	7.42	3.02	4.95
0.60	8.20	3.22	5.12
0.70	9.01	3.43	5.30
0.80	9.86	3.64	5.47
0.90	10.73	3.85	5.65
1.00	11.64	4.07	5.82
1.10	12.57	4.28	5.98
1.20	13.53	4.49	6.15
1.30	14.53	4.71	6.31
1.40	15.55	4.92	6.48
1.50	16.60	5.14	6.64
1.60	17.68	5.36	6.80
1.70	18.79	5.58	6.96
1.80	19.93	5.80	7.12
1.90	21.09	6.02	7.27
2.00	22.30	6.24	7.43

Cuadro 7.1: *Coefficientes de rigidez para las vigas*

### Longitud de pandeo

En cuanto a la longitud de pandeo de la barra en estudio, igualmente podemos usar los resultados obtenidos en I-A. Así pues:

$$L_k = \frac{L}{\gamma_c} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c))}} \right) \right] \right] \quad (7.283)$$

Donde:

$$C_1 = - \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + (s_{\gamma_c ii} + s_{\gamma_c ji}) \right] \quad (7.284)$$

$$C_2 = (1 + \gamma_c)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) + (s_{\gamma_c ij} + s_{\gamma_c jj}) \right] \quad (7.285)$$

Y el coeficiente de esbeltez vendrá dado por:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (7.286)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma_c} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c))}} \right) \right] \right] \quad (7.287)$$

Para el cálculo de  $\beta_\gamma$ , se pueden usar los mismos ábacos de la estructura Tipo I-A (7.9 a 7.13).

### Columna equivalente

Para hallar el momento de inercia de la columna equivalente, aplicamos la ecuación de equivalencia:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (7.288)$$

De donde el momento de inercia equivalente resulta ser:

$$I_{eq} = bI_a \quad (7.289)$$

Siendo:

$$b = m \left( \frac{\beta_\gamma}{\pi} \right)^2 \quad (7.290)$$

Una vez caracterizado el comportamiento de la columna en estudio dentro de la estructura general de la Figura 7.39, analizaremos a continuación algunos casos particulares de interés práctico.

### Estructura Tipo II-A.1: Nudos C y D empotrados

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.40.

Se puede ver que:

$$\theta_C = \theta_D = 0 \quad (7.291)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 0 \quad (7.292)$$

Y los coeficientes de distribución tomarían los siguientes valores:

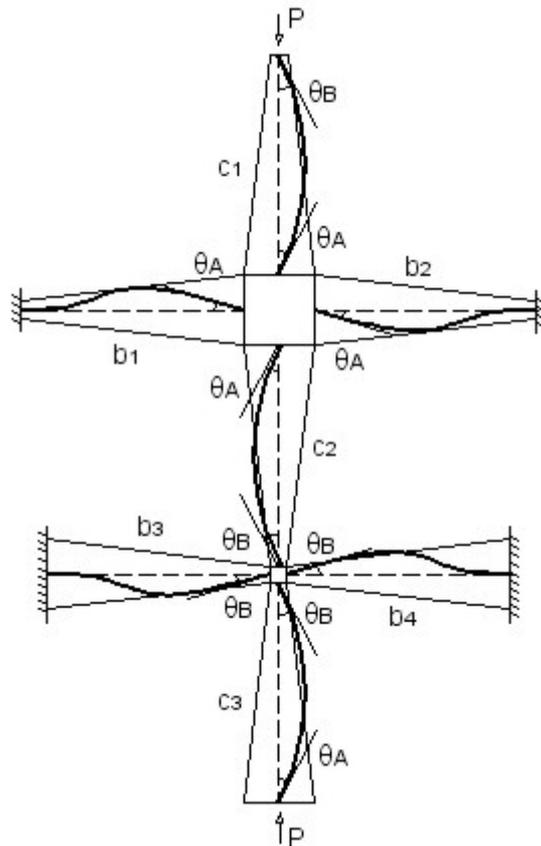


Figura 7.40: Estructura Tipo II-A.1

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{z_{bii}}{4} \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.293)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \frac{z_{bjj}}{4} \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.294)$$

### Estructura Tipo II-A.2: Nudos C y D articulados

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.41.

Según esto, tenemos que:

$$\theta_C = \frac{1}{2}\theta_A \quad (7.295)$$

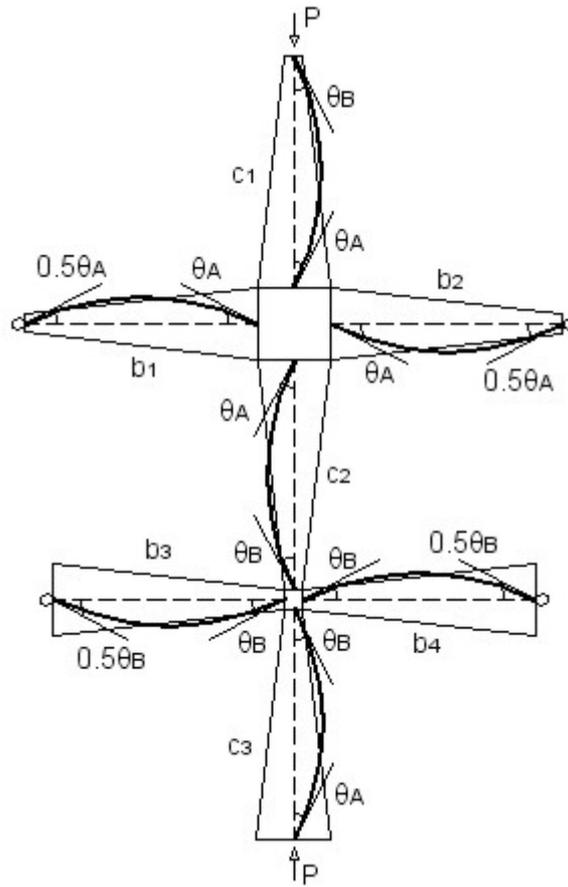


Figura 7.41: Estructura Tipo II-A.2

$$\theta_D = \frac{1}{2}\theta_B \quad (7.296)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \frac{1}{2} \quad (7.297)$$

Siendo entonces los coeficientes de distribución:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{bii}}{4} - \frac{z_{bij}}{8}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.298)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{bjj}}{4} - \frac{z_{bji}}{8}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.299)$$

**Estructura Tipo II-A.3: Nudos C y D con giros iguales a los nudos A y B**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.42.

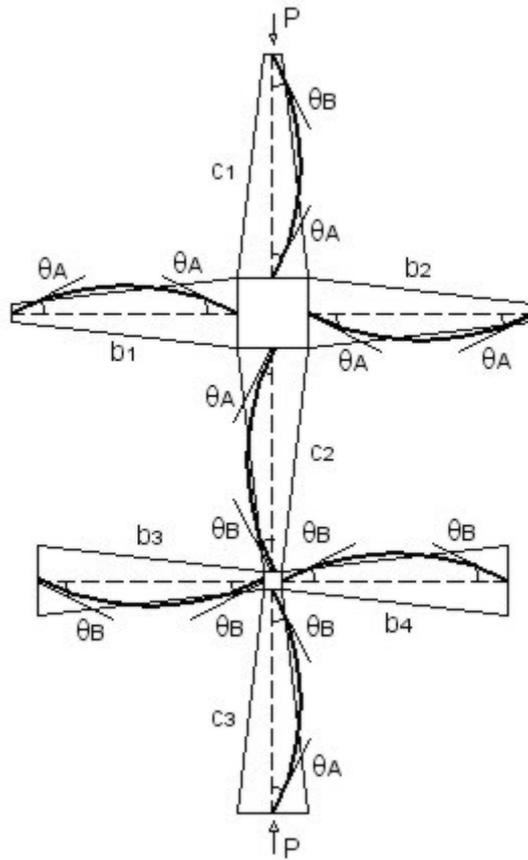


Figura 7.42: Estructura Tipo II-A.3

Y por tanto:

$$\theta_C = \theta_A \quad (7.300)$$

$$\theta_D = \theta_B \quad (7.301)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 1 \quad (7.302)$$

Con lo que los coeficientes de distribución en este caso quedan de la siguiente forma:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_{bii}} - z_{\gamma_{bij}}}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.303)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_{bjj}} - z_{\gamma_{bji}}}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.304)$$

### 7.2.2.2. Estructura Tipo II-B (Traslacional)

El esquema de análisis se muestra en la Figura 7.43.

Tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

- Los nudos de conexión entre barras son rígidos, es decir, todas las barras que concurren en el nudo experimentan el mismo giro.
- La estructura es traslacional, es decir, existe un posible desplazamiento relativo,  $\Delta$ , entre los nudos.
- Las barras pandean en doble curvatura si la estructura es traslacional, demostrado por diversos autores [8].
- Existe una carga axial,  $P$ , que comprime por sus extremos a las columnas  $c1$  y  $c3$ .
- Las vigas no conducen carga axial.
- Los giros en los extremos alejados de las vigas (C y D) no son iguales a los giros en los extremos de las columnas (A y B).
- Los giros en los extremos de las columnas son alternados, según se alternan los nudos (A y B).
- Consideraremos que, por lo general, las columnas tienen un grado de ahusamiento  $\gamma_c$ , diferente del de las vigas, al que denominaremos  $\gamma_b$ .
- No se considera el peso propio de las barras.

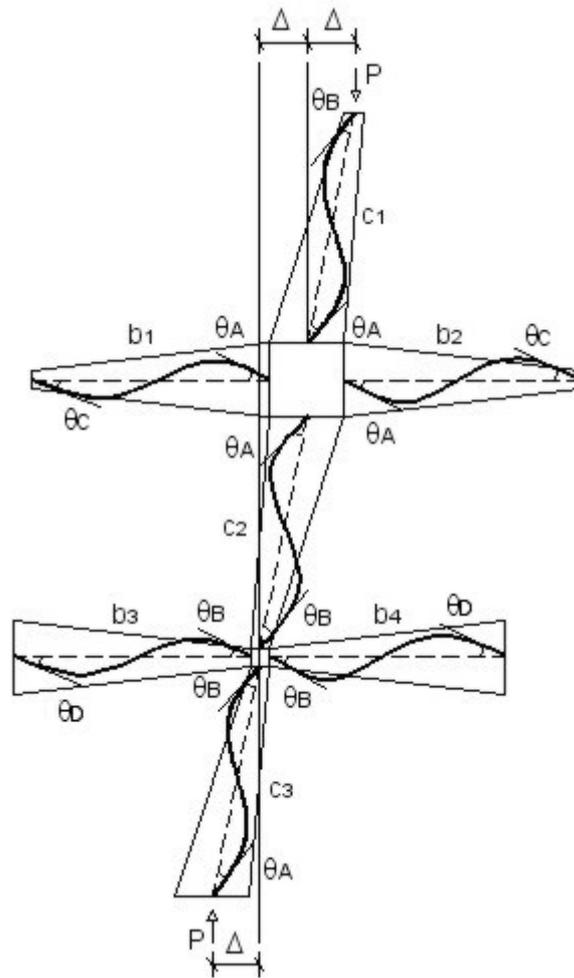


Figura 7.43: Estructura Tipo II-B

Nuestro objetivo es estudiar como pandeia la columna  $c_2$ , de longitud  $L$ , comprendida entre los nudos  $A$  y  $B$ , cuya inercia es variable según la expresión de Timoshenko (6.2), cumpliéndose que  $I_A = I_a(1 + \gamma)^2$ ,  $I_B = I_a$ .

Para el análisis emplearemos las ecuaciones pendiente-desplazamiento deducidas en la sección 7.1.2.1, aplicadas en los nudos  $A$  y  $B$ , teniendo en cuenta que para las columnas se usarán las funciones de estabilidad,  $s_{\gamma_c}$ , y para las vigas, las cuales no conducen axial, se usarán los coeficientes de rigidez,  $z_{\gamma_b}$ :

Columna 1:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} \left[ s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B - (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \quad (7.305)$$

Columna 2:

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left[ s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B - (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (7.306)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} \left[ s_{\gamma_{cji}}\theta_A + s_{\gamma_{cjj}}\theta_B - (s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}})\frac{\Delta}{L_{c2}} \right] \quad (7.307)$$

Columna 3:

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} \left[ s_{\gamma_{cji}}\theta_A + s_{\gamma_{cjj}}\theta_B - (s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}})\frac{\Delta}{L_{c3}} \right] \quad (7.308)$$

Viga 1:

$$(M_A)_{b1} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}}\theta_A + z_{\gamma_{bij}}\theta_C) = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A \quad (7.309)$$

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A} \quad (7.310)$$

Viga 2:

$$(M_A)_{b2} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}}\theta_A + z_{\gamma_{bij}}\theta_C) = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A \quad (7.311)$$

Viga 3:

$$(M_B)_{b3} = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} (z_{\gamma_{bji}}\theta_D + z_{\gamma_{bjj}}\theta_B) = \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} (z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})\theta_B \quad (7.312)$$

$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B} \quad (7.313)$$

Viga 4:

$$(M_B)_{b4} = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4} (z_{\gamma_{bji}}\theta_D + z_{\gamma_{bjj}}\theta_B) = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4} (z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})\theta_B \quad (7.314)$$

La condición de equilibrio en el nudo  $A$  es:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{b1} + (M_A)_{b2} = 0 \quad (7.315)$$

Despejando el momento correspondiente a la columna  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{b1} - (M_A)_{b2} - (M_A)_{c1} \quad (7.316)$$

Si sustituimos en esta ecuación las expresiones correspondientes en función de los giros extremos, tenemos que:

$$\begin{aligned} (M_A)_{c2} = & - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} (z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} (z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\theta_A - \\ & - \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} \left[ s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B - (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}})\frac{\Delta}{L_{c1}} \right] \end{aligned} \quad (7.317)$$

Por otra parte, de la ecuación (7.306) se deduce:

$$s_{\gamma_{cii}}\theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B - (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}})\frac{\Delta}{L_{c2}} = \frac{(M_A)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}} \quad (7.318)$$

Sustituyendo (7.318) en (7.317) y suponiendo que  $L_{c1} \approx L_{c2}$  (ambas longitudes son de órdenes de magnitud parecidos), podemos escribir:

$$(M_A)_{c2} = -(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}} \theta_A \quad (7.319)$$

Procediendo de la misma manera para el nudo  $B$ , obtenemos:

$$(M_B)_{c2} = -(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}}) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3}} \theta_B \quad (7.320)$$

Para simplificar introduciremos los factores de rigidez relativa de los nudos:

$$G_A = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2}} \quad (7.321)$$

$$G_B = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}} \quad (7.322)$$

Por lo que se obtiene:

$$(M_A)_{c2} = -\frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A}\theta_A = -R_{kA}\theta_A \quad (7.323)$$

$$(M_B)_{c2} = -\frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B}\theta_B = -R_{kB}\theta_B \quad (7.324)$$

Y ya quedan por tanto definidas las constantes elásticas o rigideces de los nudos:

$$R_{kA} = \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A} \quad (7.325)$$

$$R_{kB} = \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B} \quad (7.326)$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones (7.306) y (7.323) para el nudo  $A$ , y las ecuaciones (7.307) y (7.324) para el nudo  $B$ , llegamos a las siguientes expresiones:

$$\left[ s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \right] \theta_A + s_{\gamma_{cij}}\theta_B - (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}})\frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.327)$$

$$s_{\gamma_{cji}}\theta_A + \left[ s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \right] \theta_B - (s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}})\frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.328)$$

Aquí tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas ( $\theta_A$ ,  $\theta_B$  y  $\Delta/L_{c2}$ ), por lo que necesitamos una ecuación más. Dicha ecuación puede ser obtenida planteando el equilibrio estático de la barra  $c2$ :

$$(M_A)_{c2} + (M_B)_{c2} + P\Delta = 0 \quad (7.329)$$

Podemos ahora sustituir las expresiones (7.323) y (7.324) en esta última ecuación:

$$-\frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_A}\theta_A - \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{G_B}\theta_B + P\Delta = 0 \quad (7.330)$$

Y por otra parte, podemos modificar el término en función de  $P$  de manera más conveniente en función de  $\delta$ , teniendo en cuenta que:

$$P = \frac{(\delta^2 + \frac{1}{4}) \gamma_c^2 (EI_a)_{c2}}{L_{c2}^2} \quad (7.331)$$

Con lo que tendríamos:

$$P\Delta = \frac{(\delta^2 + \frac{1}{4}) \gamma_c^2 (EI_a)_{c2}}{L_{c2}^2} \Delta \quad (7.332)$$

No obstante, podemos poner este término en una forma más conveniente haciendo la siguiente transformación:

$$P\Delta = \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} \quad (7.333)$$

Sustituyendo este término de nuevo en la ecuación (7.330), queda:

$$\begin{aligned} & - \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \theta_A}{G_A} - \frac{(z_{\gamma_{bji}} \Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}}) \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \theta_B}{G_B} \\ & + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \end{aligned} \quad (7.334)$$

Y eliminando el factor común:

$$- \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A)}{G_A} \theta_A - \frac{(z_{\gamma_{bji}} \Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \theta_B + \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 \frac{\Delta}{L_{c2}} = 0 \quad (7.335)$$

Por tanto, recopilando las tres ecuaciones de equilibrio (7.327), (7.328) y (7.335), y escribiéndolas en forma matricial, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A)}{G_A} & s_{\gamma_{cij}} & -(s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}}) \\ s_{\gamma_{cji}} & s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bji}} \Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} & -(s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}}) \\ -\frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}} \Gamma_A)}{G_A} & -\frac{(z_{\gamma_{bji}} \Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} & (\delta^2 + \frac{1}{4}) \gamma_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \frac{\Delta}{L_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.336)$$

En el momento de producirse el pandeo, debemos obtener una solución distinta de la trivial, por lo que el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse:

$$\begin{vmatrix} s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} & s_{\gamma_{cij}} & -(s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}}) \\ s_{\gamma_{cji}} & s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} & -(s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}}) \\ -\frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} & -\frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} & (\delta^2 + \frac{1}{4})\gamma^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.337)$$

Esto nos proporciona la ecuación característica de la estructura:

$$\begin{aligned} & \left[ s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \right] \cdot \left[ s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \right] \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma^2 + \\ & + \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \cdot (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}}) \cdot s_{\gamma_{cji}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \cdot (s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}}) \cdot s_{\gamma_{cij}} - \\ & - \left[ s_{\gamma_{cjj}} + \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \right] \cdot \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \cdot (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cij}}) - \\ & - \left[ s_{\gamma_{cii}} + \frac{(z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}\Gamma_A)}{G_A} \right] \cdot \frac{(z_{\gamma_{bji}}\Gamma_B + z_{\gamma_{bjj}})}{G_B} \cdot (s_{\gamma_{cji}} + s_{\gamma_{cjj}}) - \\ & - s_{\gamma_{cij}} \cdot s_{\gamma_{cji}} \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 = 0 \end{aligned} \quad (7.338)$$

Donde debemos sustituir los valores de las funciones de estabilidad y de los coeficientes de rigidez de las barras:

$$s_{\gamma_{cii}} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma_c(1 + \gamma_c)(2\gamma_c\delta\bar{C} - (2 + \gamma_c)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma_c)\bar{C} + \gamma_c(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma_c})} \quad (7.339)$$

$$s_{\gamma_{cij}} = s_{\gamma_{cji}} = \frac{2(4\delta^2 + 1)\gamma(1 + \gamma)\left(\bar{S} - \gamma\delta\sqrt{\frac{1}{1 + \gamma}}\right)}{2(4\delta(2 + \gamma_c)\bar{C} + \gamma_c(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma_c})} \quad (7.340)$$

$$s_{\gamma_{cjj}} = \frac{(4\delta^2 + 1)\gamma(2\gamma\delta\bar{C} - (2 + \gamma)\bar{S})}{2(4\delta(2 + \gamma)\bar{C} + \gamma(4\delta^2 - 1)\bar{S} - 8\delta\sqrt{1 + \gamma})} \quad (7.341)$$

$$z_{\gamma_{bii}} = \frac{\gamma_b(1 + \gamma_b)(2(1 + \gamma_b)\ln(1 + \gamma_b) - \gamma_b(2 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b)\ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.342)$$

$$z_{\gamma_{bij}} = z_{\gamma_{bji}} = \frac{\gamma_b(1 + \gamma_b)(2\gamma_b - (2 + \gamma_b)\ln(1 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b)\ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.343)$$

$$z_{\gamma_b jj} = \frac{\gamma_b (2(1 + \gamma_b) \ln(1 + \gamma_b) - \gamma_b(2 + \gamma_b))}{(1 + \gamma_b) \ln^2(1 + \gamma_b) - \gamma_b^2} \quad (7.344)$$

$$\bar{S} = \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c)) \quad (7.345)$$

$$\bar{C} = \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c)) \quad (7.346)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{kL}{\gamma_c} - \frac{1}{4}} \quad (7.347)$$

Como venimos haciendo de manera habitual, en la expresión (7.338) podemos cambiar los factores de rigidez relativa,  $G_A$  y  $G_B$ , por los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , los cuales son más convenientes:

$$\begin{aligned} & \left[ s_{\gamma_c ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot \left[ s_{\gamma_c jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 + \\ & 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma_c ii} + s_{\gamma_c ij}) \cdot s_{\gamma_c ji} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma_c ji} + s_{\gamma_c jj}) \cdot s_{\gamma_c ij} - \\ & - \left[ s_{\gamma_c jj} + 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \right] \cdot 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma_c ii} + s_{\gamma_c ij}) - \\ & - \left[ s_{\gamma_c ii} + 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \right] \cdot 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \cdot (s_{\gamma_c ji} + s_{\gamma_c jj}) - \\ & - s_{\gamma_c ij} \cdot s_{\gamma_c ji} \cdot \left( \delta^2 + \frac{1}{4} \right) \gamma_c^2 = 0 \end{aligned} \quad (7.348)$$

Donde:

$$\eta_A^* = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{z_{\gamma_b ii} + z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4} \right) \left[ \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b1} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b2} \right]} \quad (7.349)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3}}{\left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c2} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{c3} + \left( \frac{z_{\gamma_b jj} + z_{\gamma_b ji} \Gamma_B}{4} \right) \left[ \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b3} + \left( \frac{EI_a}{L} \right)_{b4} \right]} \quad (7.350)$$

Se puede observar que con las modificaciones realizadas, hemos conseguido que la ecuación característica (7.348) sea idéntica a la ecuación (7.193), correspondiente a la estructura Tipo I-B de la sección 7.2.1.2. Esto permite la posibilidad de usar las soluciones halladas para esa estructura y aplicarlas a esta nueva estructura Tipo II-B. Los coeficientes de rigidez de las vigas,  $z_{\gamma_b}$ , son los mismos que se usaron en la estructura Tipo II-A, y que ya mostramos en el Cuadro 7.1.

### Carga de pandeo

En esta expresión (7.348), una vez fijados los valores del grado de ahusamiento de las columnas,  $\gamma_c$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , se puede despejar el valor de  $\delta$ , y finalmente el valor de la carga de pandeo:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma_c}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.351)$$

$$k^2 = \frac{P_p}{EI_a} \quad (7.352)$$

$$P_p = \frac{(\delta^2 + \frac{1}{4})\gamma_c^2 EI_a}{L^2} \quad (7.353)$$

Que como de costumbre podemos expresar en la forma general:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (7.354)$$

Donde:

$$m = \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right)\gamma_c^2 \quad (7.355)$$

Y como se ha comentado anteriormente, para conocer el valor de  $m$  podemos usar los ábacos ya calculados para la estructura Tipo I-B (Figuras 7.22 a 7.26) , o si se quiere más precisión, las tablas del Anejo A.

### Longitud de pandeo

En cuanto a la longitud de pandeo de la barra en estudio, igualmente podemos usar los resultados obtenidos en I-A. Así pues:

$$L_k = \frac{L}{\gamma_c} \left(\exp \frac{\pi}{\delta} - 1\right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c))}} \right) \right] \right] \quad (7.356)$$

Donde:

$$C_1 = - \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) + (s_{\gamma_{cii}} + s_{\gamma_{cji}}) \right] \quad (7.357)$$

$$C_2 = (1 + \gamma_c)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\eta_A^*} - 1 \right) \left[ 4 \left( \frac{1}{\eta_B^*} - 1 \right) + (s_{\gamma_{cij}} + s_{\gamma_{cjj}}) \right] \quad (7.358)$$

Y el coeficiente de esbeltez vendrá dado por:

$$L_k = \beta_\gamma L \quad (7.359)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{\gamma_c} \left( \exp \frac{\pi}{\delta} - 1 \right) \exp \left[ \frac{1}{\delta} \left[ \arcsin \left( \frac{C_1 \sin(\delta \ln(1 + \gamma_c))}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\delta \ln(1 + \gamma_c))}} \right) \right] \right] \quad (7.360)$$

Para el cálculo de  $\beta_\gamma$ , se pueden usar los mismos ábacos de la estructura Tipo I-B (7.27 a 7.31).

### Columna equivalente

Para hallar el momento de inercia de la columna equivalente, aplicamos la ecuación de equivalencia:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (7.361)$$

De donde el momento de inercia equivalente resulta ser:

$$I_{eq} = bI_a \quad (7.362)$$

Siendo:

$$b = m \left( \frac{\beta_\gamma}{\pi} \right)^2 \quad (7.363)$$

Una vez caracterizado el comportamiento de la columna en estudio dentro de la estructura general de la Figura 7.43, analizaremos a continuación algunos casos particulares de interés práctico.

**Estructura Tipo II-B.1: Nudos C y D empotrados**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.44.

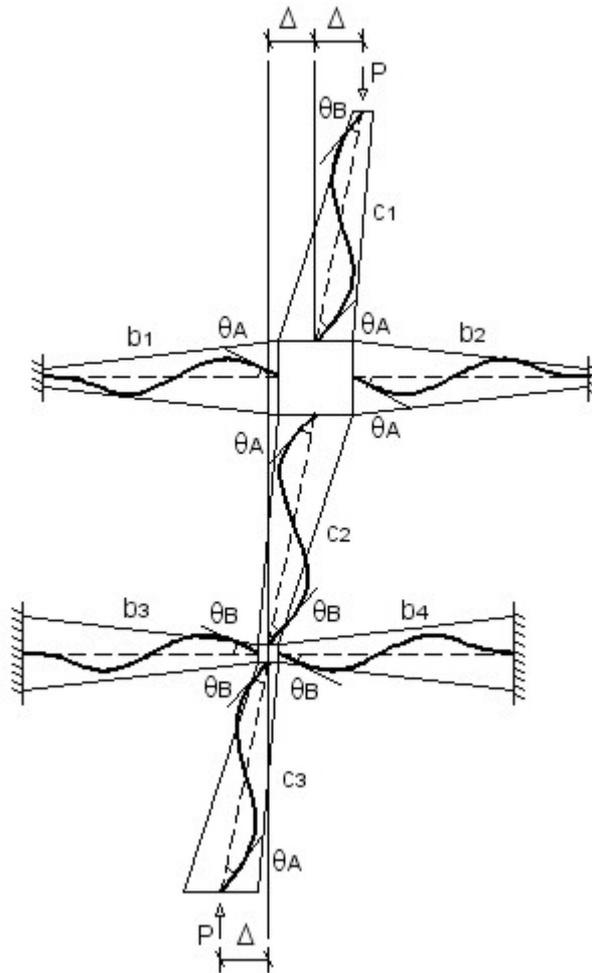


Figura 7.44: Estructura Tipo II-B.1

Se puede ver que:

$$\theta_C = \theta_D = 0 \quad (7.364)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 0 \quad (7.365)$$

Y los coeficientes de distribución tomarían los siguientes valores:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \frac{z_{bii}}{4} \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.366)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \frac{z_{bjj}}{4} \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.367)$$

**Estructura Tipo II-B.2: Nudos C y D articulados**

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.45.

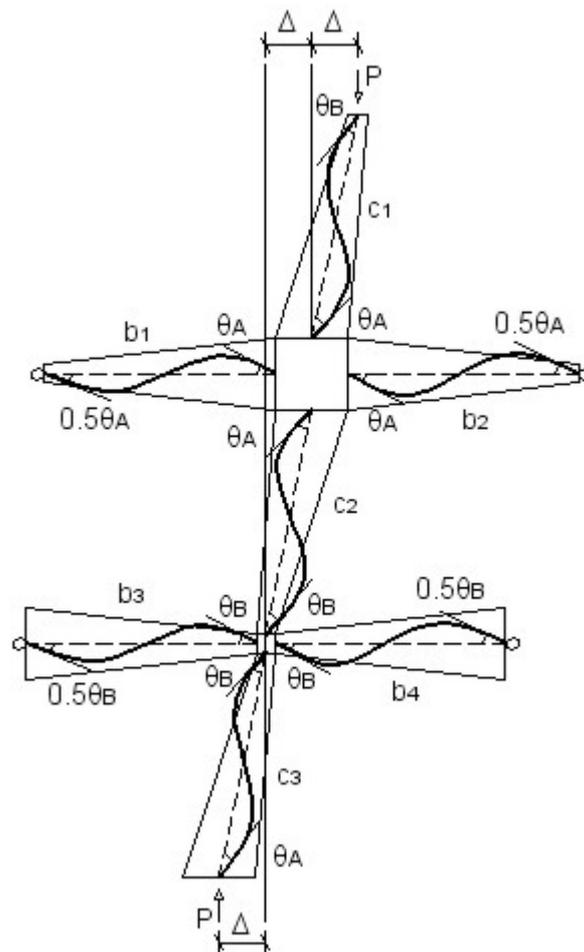


Figura 7.45: Estructura Tipo II-B.2

Según esto, tenemos que:

$$\theta_C = \frac{1}{2}\theta_A \quad (7.368)$$

$$\theta_D = \frac{1}{2}\theta_B \quad (7.369)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \frac{1}{2} \quad (7.370)$$

Siendo entonces los coeficientes de distribución:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_{bii}}}{4} + \frac{z_{\gamma_{bij}}}{8}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.371)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_{bjj}}}{4} + \frac{z_{\gamma_{bji}}}{8}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.372)$$

### Estructura Tipo II-B.3: Nudos C y D con giros iguales a los nudos A y B

El esquema del sistema estructural se muestra en la Figura 7.46.

Y por tanto:

$$\theta_C = \theta_A \quad (7.373)$$

$$\theta_D = \theta_B \quad (7.374)$$

$$\Gamma_A = \Gamma_B = 1 \quad (7.375)$$

Con lo que los coeficientes de distribución en este caso quedan de la siguiente forma:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (7.376)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_{bjj}} + z_{\gamma_{bji}}}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (7.377)$$

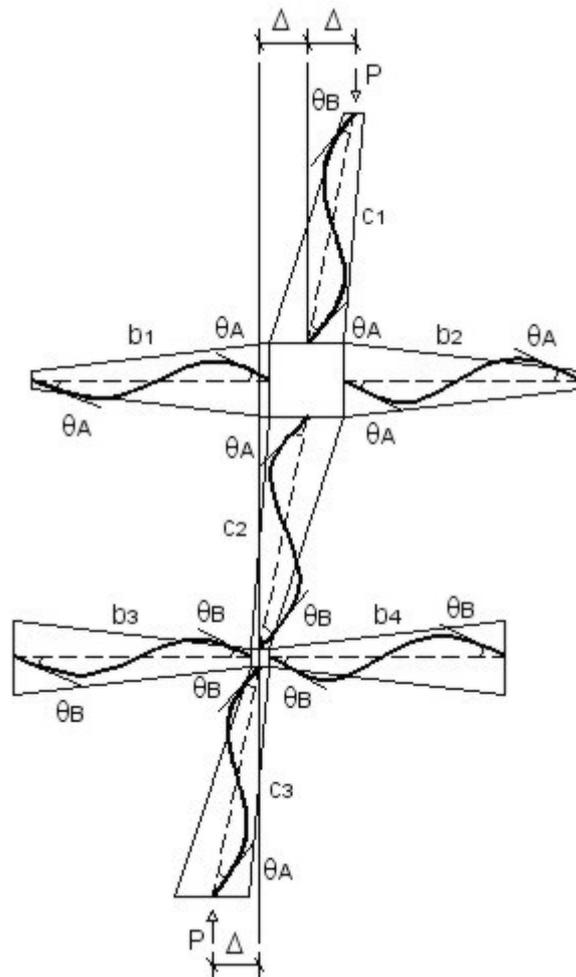


Figura 7.46: Estructura Tipo II-B.3

# Capítulo 8

## Metodología de aplicación práctica

En este capítulo nos centraremos fundamentalmente en aplicar de manera práctica la teoría desarrollada en los capítulos 6 y 7. Esto nos permitirá definir perfectamente el comportamiento frente a pandeo de diversos tipos de barras con diferentes condiciones de sustentación en sus extremos, que se puedan modelizar dentro los tipos estructurales mostrados en el capítulo 7.

Es importante recordar que puesto que en este trabajo hemos analizado en todo momento *columnas ideales*, todos los parámetros obtenidos al aplicar la metodología estarán referidos al caso idealizado. No obstante, los parámetros de pandeo para el caso ideal permiten directamente caracterizar el comportamiento *real* de la columna aplicando cualquier método, como por ejemplo el del coeficiente  $\omega$  de Dutheil, vigente en la normativa española [25].

En la sección 8.1 se describirán uno por uno los pasos a seguir para aplicar la metodología propuesta en este trabajo. En la sección 8.2 se solucionarán algunos problemas concretos a modo de ejemplo.

A lo largo de este capítulo se hará referencia continuada al Anejo A, el cual recoge de manera esquemática toda la información útil para el cálculo de pandeo en las barras de inercia variable. En este anejo aparecen las fórmulas a emplear para hallar los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , según los diferentes tipos estructurales. También se recogen en forma de tabla, todos los valores de los diferentes parámetros de pandeo representativos,  $m$ ,  $\beta_\gamma$  y  $b$ , los cuales nos permiten definir completamente las características de la barra de inercia variable en cuanto a su comportamiento frente a pandeo. Dichos parámetros de pandeo quedan definidos una vez conocido el grado de ahusamiento de la barra,  $\gamma$ , y los coeficientes de distribución  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ .

## 8.1. Proceso de cálculo de pandeo en barras de inercia variable

A continuación se muestran los pasos a seguir para el cálculo de pandeo en barras de inercia variable según la metodología propuesta en este trabajo.

### 1) Caracterización de la geometría y propiedades elásticas de la barra de inercia variable

El primer paso que debemos realizar es definir la geometría de la barra de inercia variable que queremos analizar, así como su módulo de elasticidad. Para ello es necesario conocer las siguientes características (Figura 8.1):

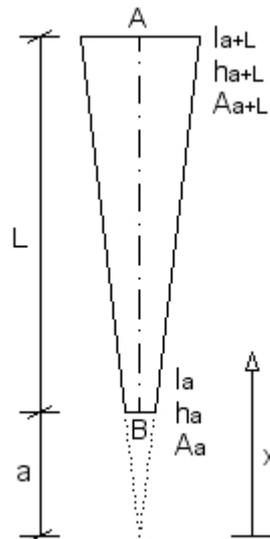


Figura 8.1: Geometría de la barra de inercia variable

- Longitud de la barra,  $L$
- Longitud de convergencia,  $a$
- Ley de inercia de la barra:  $I(x) = I_a \left(\frac{x}{a}\right)^2$
- Momento de inercia máximo,  $I_{\text{máx}} = I_A = I_{a+L}$
- Momento de inercia mínimo,  $I_{\text{mín}} = I_B = I_a$
- Ley de área de la barra:  $A(x)$ , dependiente del tipo de barra

- Área máxima,  $A_{\text{máx}} = A_A = A_{a+L}$
- Área mínima,  $A_{\text{mín}} = A_B = A_a$
- Canto máximo,  $h_{\text{máx}} = h_A = h_{a+L}$
- Canto mínimo,  $h_{\text{mín}} = h_B = h_a$
- Módulo de elasticidad del material,  $E$

Conocidos estos parámetros básicos, ya podemos hallar el coeficiente de ahusamiento de la barra, el cual tiene diferentes expresiones posibles:

$$\gamma = \frac{L}{a} = \frac{h_{a+L} - h_a}{h_a} = \sqrt{\frac{I_{a+L}}{I_a}} - 1 \quad (8.1)$$

### 2) Caracterización de las condiciones de sustentación en los extremos de la barra

En segundo lugar debemos clasificar nuestra estructura dentro de uno de los modelos estructurales mostrados en este trabajo, y que se pueden consultar de forma resumida en el Anejo A. Si la barra que queremos analizar se encuentra dentro de una estructura intraslacional, usaremos los modelos Tipo A.I y A.II. Si por el contrario, consideramos que la estructura es traslacional, debemos recurrir a los modelos Tipo B.I y B.II.

Una vez situada nuestra barra en uno de los modelos estructurales comentados, debemos hallar los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , correspondientes a ese modelo estructural. Estos coeficientes nos indicarán cómo está enlazada la barra dentro de la estructura, y pueden variar tomando valores desde 0 (extremo empotrado) hasta 1 (extremo articulado o libre, dependiendo de si la estructura es intraslacional o traslacional respectivamente).

### 3) Cálculo de la carga de pandeo de la barra

Conocidas las características de la barra y las condiciones de sus extremos, pueden calcularse fácilmente los parámetros de pandeo de la barra. Primero calcularemos la carga de pandeo, mediante la siguiente expresión:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (8.2)$$

Donde  $m$  es un parámetro que depende del grado de ahusamiento,  $\gamma$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . Para su cálculo debemos emplear

las tablas correspondientes del Anejo A. Para cada valor de  $\gamma$ , hay dos tablas de  $m$ , una de ellas es para el caso de estructura intraslacional y la otra para el caso traslacional.

**4) Cálculo del coeficiente de esbeltez y de la longitud de pandeo de la barra**

El coeficiente de esbeltez de la barra,  $\beta_\gamma$ , se puede consultar directamente de las tablas del Anejo A, al igual que el parámetro  $m$ . Y la longitud de pandeo será:

$$L_k = \beta_\gamma L \tag{8.3}$$

**5) Cálculo del momento de inercia equivalente de la barra**

Conocidos los parámetros  $m$  y  $\beta_\gamma$ , ya podemos hallar el momento de inercia que corresponde a una barra de inercia constante, biarticulada, con misma carga y longitud de pandeo que la barra de inercia variable que estamos estudiando (Figura 8.2). Dicho momento de inercia recibirá el nombre de momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ , y será el valor de inercia representativo de la barra de inercia variable a efectos de cálculo.

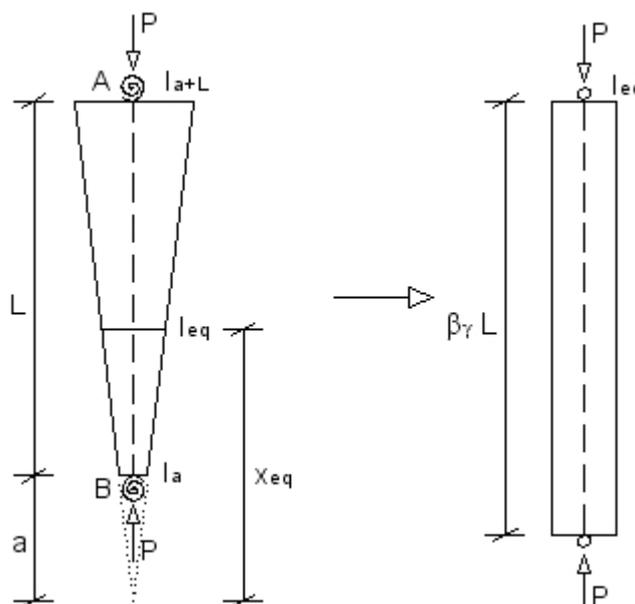


Figura 8.2: *Columna equivalente*

La ecuación de equivalencia es la siguiente:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2} \quad (8.4)$$

De donde podemos despejar el momento de inercia equivalente:

$$I_{eq} = bI_a \quad (8.5)$$

Siendo:

$$b = m \left( \frac{\beta_\gamma}{\pi} \right)^2 \quad (8.6)$$

El valor de  $b$  se puede consultar directamente de las tablas de Anejo A, al igual que  $m$  y  $\beta_\gamma$ .

### 6) Cálculo del área equivalente de la barra

Para calcular el área equivalente que represente a la columna de inercia variable, necesitamos conocer la posición que ocupa a lo largo de la directriz de la barra. Dicha posición será la misma que ocupa el momento de inercia equivalente, y que denominamos como  $x_{eq}$ . Para el cálculo de  $x_{eq}$  nos podemos servir de la ley de inercia de la barra:

$$I(x) = I_a \left( \frac{x}{a} \right)^2 \quad (8.7)$$

Y particularizando para la sección equivalente de la barra:

$$I_{eq} = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 \quad (8.8)$$

Haciendo uso de (8.5):

$$bI_a = I_a \left( \frac{x_{eq}}{a} \right)^2 \quad (8.9)$$

De donde tenemos que:

$$x_{eq} = \sqrt{b}a = \left( \frac{\sqrt{b}}{\gamma} \right) L \quad (8.10)$$

Y conocida  $x_{eq}$ , si conocemos la ley del área a lo largo de la barra, tenemos que el área equivalente será:

$$A_{eq} = A(x_{eq}) \quad (8.11)$$

**7) Cálculo de la esbeltez mecánica equivalente de la barra**

Finalmente, calcularemos la esbeltez mecánica equivalente de la barra de inercia variable según la siguiente expresión:

$$\lambda_{eq} = \frac{\beta_{\gamma} L}{i_{eq}} \quad (8.12)$$

Donde el radio de giro equivalente es:

$$i_{eq} = \sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}} \quad (8.13)$$

**8.2. Problemas resueltos**

A continuación se resuelven, por el método propuesto en la sección 8.1, algunos problemas a modo de ejemplo de aplicación. Algunos de los problemas han sido recopilados de diversas fuentes bibliográficas en las que ya fueron resueltos por diferentes métodos. Para estos problemas obtenidos de la bibliografía se muestra la referencia correspondiente, así como su solución propuesta, lo que nos permitirá contrastar y discutir los resultados obtenidos por nuestra metodología. En el caso de que alguna normativa de construcción vigente, o algún otro autor permita dar respuesta al problema planteado, también se mostrará la solución obtenida siguiendo sus directrices.

**Problema 1**

*En una barra de acero tipo “doble T”, de inercia variable, similar a la mostrada en la Figura 8.1, y articulada en sus extremos, calcular la carga de pandeo y la esbeltez mecánica, sabiendo que las características geométricas y elásticas de dicha barra toman los siguientes valores:*

- *Longitud,  $L = 5m$*
- *Canto máximo,  $h_{m\acute{a}x} = 24,9cm$*
- *Canto mínimo,  $h_{m\acute{i}n} = 12,45cm$*
- *Momento de inercia máximo,  $I_{m\acute{a}x} = I_{a+L} = 3137,25cm^4$*
- *Momento de inercia mínimo,  $I_{m\acute{i}n} = I_a = 784,31cm^4$*
- *Área aproximadamente constante,  $A \approx 33cm^2$*

- *Módulo de elasticidad del acero*,  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{kp/cm}^2$

a) Solución según la normativa NBE-EA-95 [25], Artº 3.2.5.4.

Se propone que la carga de pandeo de una pieza de inercia variable con extremos articulados, se calcule de la siguiente forma:

$$P_p = \frac{\pi^2 E c I_{\text{máx}}}{L^2} \quad (8.14)$$

Donde:

- $I_{\text{máx}}$ , es el momento de inercia máximo respecto al eje normal al plano de pandeo considerado.
- $A_m$ , es el valor medio del área a lo largo de la pieza.
- $c$ , es un coeficiente mostrado en la normativa (Tabla 3.2.5.4) y que es función de la geometría de la barra.

Por otra parte, la esbeltez mecánica de la barra será:

$$\lambda = \frac{L}{i} \quad (8.15)$$

Donde:

$$i = \sqrt{\frac{c \cdot I_{\text{máx}}}{A_m}} \quad (8.16)$$

Los valores que toman las variables en este caso son:

- $I_{\text{máx}} = I_{a+L} = 3137,25 \text{cm}^4$
- $A_m = A = 33 \text{cm}^2$
- $c = 0,51$

Sustituyendo los valores correspondientes, tenemos que el valor de la carga de pandeo es:

$$P_p = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,51 \cdot 3137,25}{500^2} = 132647 \text{kp} \quad (8.17)$$

Y la esbeltez mecánica será:

$$\lambda = \frac{500}{\sqrt{\frac{0,51 \cdot 3137,25}{33}}} = 71,81 \quad (8.18)$$

**b) Solución según T. V. Galambos [14]**

Este autor propone que la carga de pandeo se calcule mediante la expresión:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_a}{\beta_{eq}^2 L^2} \quad (8.19)$$

Donde  $\beta_{eq}$  es un coeficiente de esbeltez equivalente, que según el autor se puede estimar de la siguiente forma:

$$\beta_{eq} = 1 - 0,375\gamma + 0,08\gamma^2(1 - 0,0775\gamma) \quad (8.20)$$

Siendo  $\gamma$  el coeficiente de ahusamiento, el cual podemos calcular con los datos del enunciado:

$$\gamma = \sqrt{\frac{I_{a+L}}{I_a}} - 1 = \sqrt{\frac{3137,25}{784,31}} - 1 = 1 \quad (8.21)$$

Y según esto, el coeficiente de esbeltez equivalente vale:

$$\beta_{eq} = 1 - 0,375 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1^2(1 - 0,0775 \cdot 1) = 0,7 \quad (8.22)$$

Con lo que la carga de pandeo resulta ser:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_a}{\beta_{eq}^2 L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 784,31}{0,7^2 \cdot 500^2} = 132700kp \quad (8.23)$$

En cuanto a la esbeltez mecánica, el autor la define como:

$$\lambda_{eq} = \frac{\beta_{eq}L}{i} = \frac{\beta_{eq}L}{\sqrt{\frac{I_a}{A_{m\acute{a}x}}}} \quad (8.24)$$

Y sustituyendo los valores correspondientes:

$$\lambda_{eq} = \frac{0,7 \cdot 500}{\sqrt{\frac{784,31}{33}}} = 71,79 \quad (8.25)$$

**c) Solución según la nueva metodología propuesta**

La solución que se propone en este trabajo se obtiene de seguir los pasos mostrados en la sección 8.1.

Ya conocemos el coeficiente de ahusamiento,  $\gamma = 1$ , calculado en el apartado b).

Los coeficientes de distribución en este caso son  $\eta_A^* = \eta_B^* = 1$ , ya que la barra está articulada en ambos extremos.

Y ya podemos calcular la carga de pandeo exacta, a diferencia de los valores aproximados que se obtuvieron en los apartados a) y b):

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \quad (8.26)$$

Consultando la Tabla 8 del Anejo A, tenemos que  $m = 20,79$ , que permite calcular el valor de la carga de pandeo:

$$P_p = \frac{20,79 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 784,31}{500^2} = 136969kp \quad (8.27)$$

El coeficiente de esbeltez se puede obtener de la Tabla 9 (Anejo A), y en este caso toma el valor  $\beta_\gamma = 1$ . Cabe destacar que este es el coeficiente de esbeltez exacto de la barra de inercia variable, y como se puede observar, es diferente del coeficiente equivalente propuesto por Galambos en el apartado b),  $\beta_{eq} = 0,7$ .

La longitud de pandeo será por tanto:

$$L_k = \beta_\gamma L = L = 5m \quad (8.28)$$

Por otra parte, el momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = bI_a \quad (8.29)$$

Y consultando la Tabla 10 (Anejo A), tenemos que  $b = 2,11$ , por lo que se obtiene:

$$I_{eq} = 2,11 \cdot 784,31 = 1654,89cm^4 \quad (8.30)$$

Finalmente la esbeltez mecánica equivalente es:

$$\lambda_{eq} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} = \frac{1 \cdot 500}{\sqrt{\frac{1654,89}{33}}} = 70,61 \quad (8.31)$$

### Discusión de resultados

En el Cuadro 8.1 se muestran los diferentes valores de carga de pandeo y esbeltez mecánica obtenidos por los tres métodos expuestos.

	EA-95	Galambos	Metodología propuesta
$P_p(kp)$	132647	132700	136969
$\lambda$	71,81	71,79	70,61

Cuadro 8.1: *Resultados del problema 1*

Se puede observar como según la EA-95 y Galambos se obtienen valores de carga de pandeo y esbeltez mecánica más conservadores que con la metodología propuesta en este trabajo, lo cual era de esperar, ya que los dos primeros métodos son aproximados, mientras que nosotros hemos calculado valores exactos.

La carga de pandeo que aquí se propone es exacta porque se deriva directamente del análisis estático de la barra, y en cuanto a la esbeltez mecánica, es la que se obtiene de aplicar el modelo de columna equivalente, el cual es coherente con la carga y longitud de pandeo exactas obtenidas previamente.

La esbeltez mecánica propuesta en la EA-95, emplea en su cálculo un momento de inercia corregido, un coeficiente de esbeltez igual a 1, y el área media. Por otra parte, Galambos emplea el momento de inercia mínimo, un coeficiente de esbeltez equivalente igual a 0.7, y el área mínima. A veces, para ser más conservador, se suele emplear el área máxima en el cálculo de la esbeltez mecánica, lo que da un valor de la esbeltez más desfavorable. En definitiva, se aprecia una gran incertidumbre en cuanto a qué valores de inercia, área y longitud de pandeo se deben usar a la hora de calcular la esbeltez mecánica de una barra de inercia variable. Sin embargo, esta incertidumbre queda despejada abordando el problema desde su raíz y definiendo un modelo de columna equivalente, de inercia constante, que represente correctamente a la columna de inercia variable. Y eso es lo que hemos hecho en este trabajo, calcular la carga de pandeo y longitud de pandeo exactas de la barra de inercia variable, y a partir de esos parámetros fiables, hemos buscado una barra equivalente de inercia constante que se comporte frente a pandeo de manera idéntica a la barra de inercia variable que estamos estudiando. El resultado es una optimización en los valores de carga de pandeo y de esbeltez mecánica, lo que finalmente nos llevará a un ahorro de material, que en algunos casos puede ser considerable.

Más adelante podremos ver que además de obtener resultados más ajustados en comparación con la normativa existente, también se solucionan problemas a los que dicha normativa no da solución.

## Problema 2

Fuente: Referencia [8], Problema 6.3, pág 467. Enunciado traducido y adaptado.

*Calcular la carga de pandeo de la columna de inercia variable mostrada en la Figura 8.3.*

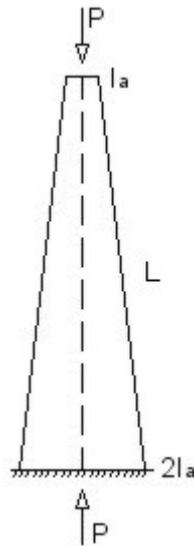


Figura 8.3: Barra libre-empotrada

### a) Solución propuesta por los autores

Se propone este problema para hallar la carga de pandeo aplicando un método energético-numérico (Rayleigh-Ritz). La solución es la siguiente:

$$P_p = \frac{4,20EI_a}{L^2} \quad (8.32)$$

### b) Solución según la nueva metodología propuesta

El coeficiente de ahusamiento es:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2I_a}{I_a}} - 1 = 0,41 \quad (8.33)$$

Los coeficientes de distribución son  $\eta_A^* = 0$  (extremo empotrado) y  $\eta_B^* = 1$  (extremo libre). Consultando las Tabla 18 y 21 (Anejo A) e interpolando entre ambas para  $\gamma = 0,41$ , se obtiene  $m = 4,05$ , y por tanto la carga de pandeo es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} = \frac{4,05EI_a}{L^2} \quad (8.34)$$

La interpolación realizada en las tablas es bastante fiable, ya que aplicando la ecuación exacta (7.193) para  $\gamma = 0,41$ , se obtiene con precisión  $m = 4,0456$ . Se ha comprobado que interpolando en las tablas del Anejo A, se pueden obtener valores casi exactos (error menor del 1% en el caso más desfavorable).

### Discusión de resultados

Se puede ver como las soluciones obtenidas en los apartados a) y b) son muy similares, aunque el método energético-numérico predice un valor sobrestimado de la carga de pandeo, algo habitual en los métodos energéticos, ya que en ellos suele trabajarse con una simple aproximación de la ley de la deformada, y no con la deformada exacta con la que hemos trabajado nosotros. Teniendo en cuenta que la solución exacta se obtiene para  $m = 4,05$ , podemos estimar el error cometido aplicando el método energético que proponen los autores del problema:

$$\varepsilon = \left| \frac{4,05 - 4,20}{4,05} \right| \cdot 100 = 3,7\% \quad (8.35)$$

Es decir, el método energético proporciona soluciones con un error de un 3,7% respecto de la solución exacta que nosotros proponemos.

### Problema 3

Fuente: Referencia [8], Problema 6.4, pág 467. Enunciado traducido y adaptado.

*Calcular la carga de pandeo de la columna de inercia variable mostrada en la Figura 8.4.*

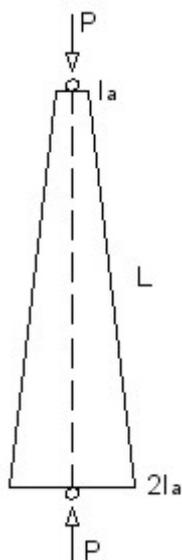


Figura 8.4: Barra biarticulada

**a) Solución propuesta por los autores**

Los autores proponen hallar la carga de pandeo aplicando otro método energético-numérico (Galerkin). La solución es la siguiente:

$$P_p = \frac{14,82EI_a}{L^2} \tag{8.36}$$

**b) Solución según la nueva metodología propuesta**

El coeficiente de ahusamiento es de nuevo:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2I_a}{I_a}} - 1 = 0,41 \tag{8.37}$$

Los coeficientes de distribución son  $\eta_A^* = \eta_B^* = 1$  (extremos articulados). Consultando las Tabla 2 y 5 (Anejo A) e interpolando entre ambas para  $\gamma = 0,41$ , se obtiene  $m = 14,14$ , y por tanto la carga de pandeo es:

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} = \frac{14,14EI_a}{L^2} \tag{8.38}$$

**Discusión de resultados**

De nuevo se puede observar que el método energético que proponen los autores vuelve a sobreestimar la carga de pandeo, esta vez cometiendo un error del 4,8 % respecto de la solución exacta.

**Problema 4**

*Calcular la carga de pandeo, la longitud de pandeo y la esbeltez mecánica de los pilares del pórtico biarticulado de inercia variable mostrado en la Figura 8.5.*

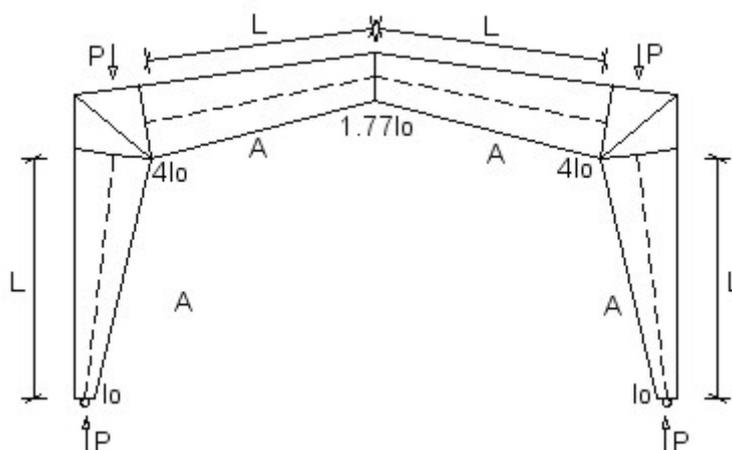


Figura 8.5: Pórtico de inercia variable birticulado

**a) Solución según Martín López Aguilar [22]**

Para este problema hemos consultado el trabajo de este autor, que proporciona soluciones exactas para pórticos a dos aguas formados por barras de inercia variable. La solución es exacta, ya que el autor halla la carga de pandeo de los pilares del pórtico resolviendo el determinante de la matriz de rigidez, que da lugar a la ecuación característica exacta de la estructura.

El modelo propuesto por este autor considera que los dinteles del pórtico no conducen carga axial, hipótesis que también se ha considerado en nuestro trabajo, por ser la compresión de los dinteles prácticamente despreciable en comparación a la flexión que soportan, sobre todo en pórticos de grandes luces, donde el ángulo de vertiente es pequeño.

La solución obtenida, aplicando el procedimiento mostrado por el autor en la página 100 de su trabajo, es la siguiente:

Como en el pórtico hay simetría, sólo tenemos que analizar uno de los pilares. Se modeliza el pilar del pórtico como una columna de inercia constante cuyo valor es el de la inercia mínima del pilar,  $I_{\text{mín}}$ . La carga de pandeo puede ser calculada de la siguiente forma:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_{\text{mín}}}{\beta_{eq}^2 L^2} \quad (8.39)$$

Siendo  $\beta_{eq}$ , el coeficiente de esbeltez equivalente que se puede obtener de unos ábacos que el autor proporciona para tal efecto. Para leer este coeficiente en los ábacos, es necesario fijar tres parámetros que se muestran a continuación:

- Coeficiente de ahusamiento del pilar:

$$\gamma_p = \sqrt{\frac{I_{\text{máx},p}}{I_{\text{mín},p}}} - 1 = \sqrt{\frac{4I_0}{I_0}} - 1 = 1 \quad (8.40)$$

- Coeficiente de ahusamiento del dintel:

$$\gamma_d = \sqrt{\frac{I_{\text{máx},d}}{I_{\text{mín},d}}} - 1 = \sqrt{\frac{4I_0}{1,77I_0}} - 1 = 0,5 \quad (8.41)$$

- Coeficiente de rigidez relativa pilar/dintel:

$$G = \frac{I_{\text{mín},p}/L_p}{I_{\text{mín},d}/L_d} = \frac{I_0/L}{1,77I_0/L} = 0,56 \quad (8.42)$$

Estos valores nos indican, tras la lectura del ábaco correspondiente, que  $\beta_{eq} = 1,5$ , por lo que la longitud de pandeo equivalente es:

$$L_{k,eq} = 1,5L \quad (8.43)$$

Y la carga de pandeo será entonces:

$$P_p = \frac{\pi^2 EI_0}{1,5^2 L^2} = \frac{4,39EI_0}{L^2} \quad (8.44)$$

Cabe destacar que esta carga de pandeo es exacta, ya que el autor la calcula a partir de la matriz de rigidez de la estructura completa. Sin embargo, el coeficiente de esbeltez que emplea, no es exacto, sino que es un coeficiente

ajustado para que la barra equivalente de inercia constante tenga una inercia igual a la inercia mínima,  $I_0$ .

Finalmente este autor propone calcular la esbeltez mecánica equivalente según la siguiente expresión:

$$\lambda_{eq} = \frac{\beta_{eq}L}{\sqrt{\frac{I_0}{A_{m\acute{a}x}}}} = \frac{1,5L}{\sqrt{\frac{I_0}{A}}} \quad (8.45)$$

### b) Solución según la nueva metodología propuesta

Los coeficientes de ahusamiento ya los tenemos calculados del apartado a), siendo en nuestra nomenclatura:

$$\gamma_c = 1, \quad \gamma_b = 0,5 \quad (8.46)$$

Para calcular los coeficientes de distribución, podemos incluir el pórtico con barras de inercia variable dentro de la estructura Tipo II-B del Anejo A, ya que consideramos un comportamiento traslacional (caso más desfavorable) si no tenemos información sobre el grado de arriostramiento de la estructura. En este caso, los coeficientes de distribución de ambos pilares toman la siguiente forma:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii} + z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} \quad (8.47)$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj} + z_{\gamma_b ji} \Gamma_B}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b4}\right]} \quad (8.48)$$

En nuestro caso concreto, no existen las columnas  $c1$  y  $c3$ , ni las vigas  $b1$ ,  $b3$  y  $b4$ , y el extremo  $B$  se encuentra articulado. Por ello, teniendo en cuenta estas consideraciones y sustituyendo los valores de nuestro problema, los coeficientes se pueden reescribir así:

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{EI_0}{L}\right)}{\left(\frac{EI_0}{L}\right) + \left(\frac{z_{\gamma_b ii} + z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4}\right) \left(\frac{1,77EI_0}{L}\right)} = \frac{1}{1 + 1,77 \left(\frac{z_{\gamma_b ii} + z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4}\right)} \quad (8.49)$$

$$\eta_B^* = 1 \quad (8.50)$$

Para el coeficiente de distribución del extremo  $A$ , debemos consultar los valores de los coeficientes de rigidez de la viga (dintel). Estos valores se muestran en la Tabla 17 del Anejo A. Y puesto que el ahusamiento del dintel es  $\gamma_b = 0,5$ , tenemos que:

$$z_{\gamma_b ii} = 7,42, \quad z_{\gamma_b ij} = 3,02 \quad (8.51)$$

También debemos definir la relación entre giros de los extremos del dintel:

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A} \quad (8.52)$$

Como el nudo  $C$ , de conexión entre dinteles, es un nudo rígido, no podemos establecer a priori un valor concreto para el giro,  $\theta_C$ , en ese nudo. Sin embargo, podemos conocer la relación  $\Gamma_A$  entre los giros  $\theta_C$  y  $\theta_A$  consultando el trabajo de J. Ortiz Herrera [26], de donde se puede deducir, haciendo la extrapolación a nuestra metodología, que dicha relación es aproximadamente  $\Gamma_A = -0,25$  para pórticos a dos aguas.

Así pues, los coeficientes de distribución del pilar serán finalmente:

$$\eta_A^* = \frac{1}{1 + 1,77 \left( \frac{7,42 - 3,02 \cdot 0,25}{4} \right)} = 0,25 \quad (8.53)$$

$$\eta_B^* = 1 \quad (8.54)$$

Conocidos los coeficientes  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , podemos obtener los parámetros de pandeo del pilar consultando las Tablas 24, 25 y 26 del Anejo A:

$$m = 4,58 \quad (8.55)$$

$$\beta_\gamma = 3,56 \quad (8.56)$$

$$b = 5,83 \quad (8.57)$$

Y según esto, la carga de pandeo es:

$$P_p = \frac{mEI_0}{L^2} = \frac{4,58EI_0}{L^2} \quad (8.58)$$

La longitud de pandeo es:

$$L_k = \beta_\gamma L = 3,56L \quad (8.59)$$

El momento de inercia equivalente es:

$$I_{eq} = bI_0 = 5,83I_0 \tag{8.60}$$

Y finalmente podemos hallar la esbeltez mecánica equivalente:

$$\lambda_{eq} = \frac{\beta_\gamma L}{\sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}} = \frac{3,56L}{\sqrt{\frac{5,83I_0}{A}}} = \frac{1,47L}{\sqrt{\frac{I_0}{A}}} \tag{8.61}$$

Es importante destacar que la carga de pandeo, longitud de pandeo y esbeltez mecánica, calculados según este método, no son exactos, sino aproximados. En realidad, si los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , que hemos empleado, hubieran sido exactos, los resultados obtenidos a partir de ellos también serían totalmente exactos. Sin embargo, estos coeficientes sólo son aproximaciones, ya que no tienen en cuenta el comportamiento de la estructura completa, sino que se limitan a caracterizar las condiciones de empotramiento de los nudos  $A$  y  $B$  considerando únicamente las características de las barras que concurren en dichos nudos.

### Discusión de resultados

En el Cuadro 8.2 se muestran los resultados obtenidos por los dos métodos expuestos.

	López Aguilar	Metodología propuesta
$P_p$	$4,39EI_0/L^2$	$4,58EI_0/L^2$
$L_k$	$1,5L$	$3,56L$
$\lambda$	$1,5L/\sqrt{I_0/A}$	$1,47L/\sqrt{I_0/A}$

Cuadro 8.2: Resultados del problema 4

Teniendo en cuenta que la carga de pandeo calculada por López Aguilar es exacta, podemos ver el error que hemos cometido con la nueva metodología propuesta en este trabajo:

$$\varepsilon = \left| \frac{4,39 - 4,58}{4,39} \right| \cdot 100 = 4,3\% \tag{8.62}$$

Se puede ver que el error es bastante pequeño, a pesar de ser un error por exceso.

Por otra parte, en lo referente a la longitud de pandeo,  $L_k$ , López Aguilar propone una longitud de pandeo basada en el coeficiente de esbeltez equivalente,  $\beta_{eq} = 1,5$ , el cual no es el verdadero coeficiente de esbeltez correspondiente a la barra de inercia variable, sino que como se ha dicho anteriormente, es un coeficiente ajustado. Sin embargo, en la metodología propuesta en este trabajo, se ha calculado la verdadera longitud de pandeo de la barra, es decir, la distancia entre puntos de inflexión de la deformada de dicha barra. Y aunque dicha longitud de pandeo no es completamente exacta, debido a la no exactitud de los coeficientes de distribución, sí que es muy aproximada; y en los casos en los que los coeficientes de distribución son conocidos con certeza (articulaciones, empotramientos o extremos libres) sí que obtenemos la longitud de pandeo exacta de la barra de inercia variable.

Finalmente, analizando las expresiones de la esbeltez mecánica, podemos ver que se obtienen valores parecidos empleando ambos métodos, aunque el de López Aguilar es más conservador que el obtenido por la nueva metodología propuesta. Esto se debe a que López Aguilar emplea una longitud de pandeo ajustada y un momento de inercia mínimo,  $I_0$ , y sin embargo nosotros empleamos una longitud de pandeo exacta, y un momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ , derivado de la carga y longitud de pandeo exactas, lo que nos lleva a concluir que dicho momento de inercia sí representa de manera precisa las características de la columna equivalente que modeliza a la barra de inercia variable. Todo esto implica que podemos optimizar el valor de la esbeltez mecánica de la barra, lo que nos llevará a un ahorro de sección y de material, que en ocasiones puede ser considerable.

Quedan por tanto mostradas las ventajas e inconvenientes de cada uno de los dos métodos empleados en la resolución de este problema. El método de López Aguilar es más exacto en algunos aspectos, y el propuesto en este trabajo optimiza otros factores, pero en definitiva ambos dan resultados útiles y bastante fiables. No obstante, en el problema 5 podremos ver que nuestra metodología, a pesar de ser sólo aproximada en ciertos casos, permite dar solución a muy diversos tipos o modelos estructurales, lo cual no es posible con métodos como el de la matriz de rigidez que emplea López Aguilar.

## Problema 5

*Calcular la carga de pandeo, longitud de pandeo y esbeltez mecánica de los pilares extremos y del pilar intermedio del pórtico doble de inercia variable mostrado en la Figura 8.6. Todos los pilares están empotrados en la base.*

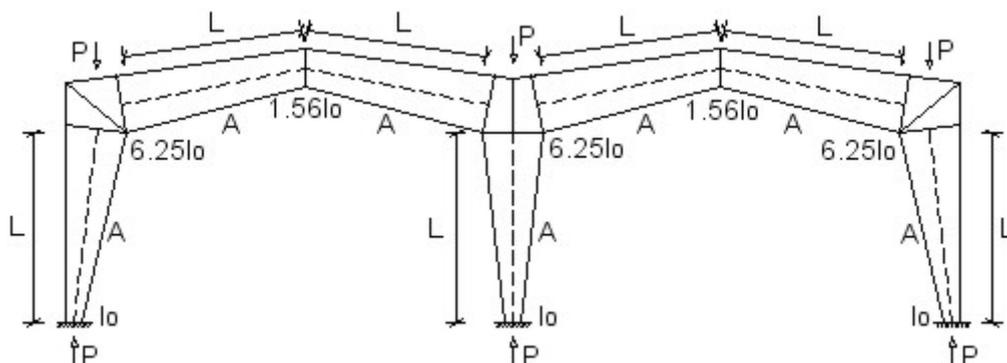


Figura 8.6: Pórtico doble de inercia variable con pilares empotrados en la base

En este caso no se ha encontrado en la bibliografía y en la normativa ninguna metodología que permita analizar el comportamiento frente a pandeo de los pilares de este pórtico. Por ello, solucionaremos el problema aplicando únicamente la nueva metodología propuesta en este trabajo.

En primer lugar calculamos los coeficientes de ahusamiento de los pilares y de los dinteles:

- Coeficiente ahusamiento pilar:

$$\gamma_c = \sqrt{\frac{6,25I_0}{I_0}} - 1 = 1,5 \quad (8.63)$$

- Coeficiente ahusamiento dintel:

$$\gamma_b = \sqrt{\frac{6,25I_0}{1,56I_0}} - 1 = 1 \quad (8.64)$$

Los pilares que queremos analizar se pueden englobar en el modelo estructural Tipo II-B del Anejo A, al igual que hicimos en el problema 4. Los coeficientes de distribución son:

- Coeficientes de distribución de los pilares extremos:

$$\begin{aligned}
 \eta_{A,1}^* &= \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b,ii} + z_{\gamma_b,ij}\Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} = \\
 &= \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b,ii} + z_{\gamma_b,ij}\Gamma_A}{4}\right) \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}} = \\
 &= \frac{\left(\frac{EI_0}{L}\right)}{\left(\frac{EI_0}{L}\right) + \left(\frac{11,64 - 4,07 \cdot 0,25}{4}\right) \left(\frac{1,56EI_0}{L}\right)} = 0,19 \quad (8.65)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{B,1}^* = 0 \quad (8.66)$$

- Coeficientes de distribución del pilar central:

$$\begin{aligned}
 \eta_{A,2}^* &= \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b,ii} + z_{\gamma_b,ij}\Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} = \\
 &= \frac{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b,ii} + z_{\gamma_b,ij}\Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{EI_a}{L}\right)_{b2}\right]} = \\
 &= \frac{\left(\frac{EI_0}{L}\right)}{\left(\frac{EI_0}{L}\right) + \left(\frac{11,64 - 4,07 \cdot 0,25}{4}\right) \left[\left(\frac{1,56EI_0}{L}\right) + \left(\frac{1,56EI_0}{L}\right)\right]} = 0,11 \quad (8.67)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{B,2}^* = 0 \quad (8.68)$$

Y con estos coeficientes, consultando las tablas del Anejo A, ya podemos calcular los parámetros de pandeo para cada uno de los pilares:

- Pilares extremos:

$$m_1 = 17,88 \Rightarrow P_{p,1} = \frac{17,88EI_0}{L^2} \quad (8.69)$$

$$\beta_{\gamma,1} = 1,35 \Rightarrow L_{k,1} = 1,35L \quad (8.70)$$

$$b_1 = 3,29 \Rightarrow I_{eq,1} = 3,29I_0 \quad (8.71)$$

$$\lambda_{eq,1} = \frac{1,35L}{\sqrt{\frac{3,29I_0}{A}}} = \frac{0,74L}{\sqrt{\frac{I_0}{A}}} \quad (8.72)$$

- Pilar central:

$$m_2 = 21,34 \Rightarrow P_{p,2} = \frac{21,34EI_0}{L^2} \quad (8.73)$$

$$\beta_{\gamma,2} = 1,19 \Rightarrow L_{k,2} = 1,19L \quad (8.74)$$

$$b_2 = 3,03 \Rightarrow I_{eq,2} = 3,03I_0 \quad (8.75)$$

$$\lambda_{eq,2} = \frac{1,19L}{\sqrt{\frac{3,03I_0}{A}}} = \frac{0,68L}{\sqrt{\frac{I_0}{A}}} \quad (8.76)$$

Se puede observar cómo la carga de pandeo del pilar central es ligeramente mayor a la de los pilares extremos. Lógicamente, esto es debido a que el extremo superior de dicho pilar está más arriostrado que en el caso de los pilares extremos, ya que en dicho nudo concurren dos dinteles en vez de uno solo. En cuanto a la longitud de pandeo y la esbeltez mecánica, son menores en el caso del pilar central, lo que confirma su mayor resistencia frente a pandeo respecto de los pilares extremos.

Se ha podido comprobar cómo el método propuesto permite una solución rápida y sencilla al problema de pandeo en una estructura bastante compleja, que sería difícil de estudiar por el método exacto de la matriz de rigidez. Además, como se ha comentado antes, este método es muy versátil y abierto, ya que si la estructura no fuera simétrica y hubiera diferentes barras con distintas inercias y áreas, igualmente podríamos hallar los parámetros de pandeo sin ninguna dificultad. En cambio, el método exacto es fuertemente cerrado y sólo da solución para modelos estructurales muy concretos.

# Capítulo 9

## Resultados y conclusiones

En este capítulo se recogen brevemente los resultados y las conclusiones obtenidas de nuestro trabajo.

### 9.1. Resultados

En primer lugar debemos indicar que, como fase previa al cumplimiento de los objetivos propuestos, se ha realizado una extensa labor de revisión bibliográfica, recopilando, dentro de lo que ha sido posible, la información existente sobre el pandeo por flexión elástico y plástico de barras, ideales y reales, de inercia constante y variable. Toda esta información se recoge en la Parte I de este trabajo.

Se mostrarán a continuación los resultados obtenidos, asociados a cada uno de los objetivos planteados, los cuales se justifican en la Parte II de este trabajo.

#### 9.1.1. Resultados referentes a los objetivos 1 y 3 (Capítulos 6 y 7)

##### a) Descripción del pandeo de columnas aisladas de inercia variable para los cinco casos de sustentación de Euler

Se ha conseguido describir física y matemáticamente el comportamiento exacto frente a pandeo de una columna ideal de inercia variable bajo diversas condiciones de sustentación en sus extremos: barra biarticulada, empotrada-libre, biempotrada, biempotrada con desplazamiento relativo entre extremos y empotrada-articulada. Estos casos fueron estudiados por Euler para barras

de inercia constante, y en este trabajo hemos ampliado el análisis al caso de las barras de inercia variable. Algunos resultados de interés son los siguientes:

- Para cada uno de estos cinco casos, hemos obtenido las fórmulas matemáticas que representan la deformada de la barra, la ley de momentos flectores, la flecha máxima y su localización a lo largo de la barra, el momento flector máximo y su localización, la carga de pandeo y la longitud de pandeo, siendo todos estos parámetros dependientes del grado de ahusamiento de la barra,  $\gamma$ . El procedimiento para la obtención de dichas fórmulas ha sido analítico y exacto, lo que nos permite tener soluciones generales y cualitativas.
- Al aplicar las fórmulas para la *carga de pandeo*, hemos podido observar ciertos comportamientos de las barras de inercia variable:
  1. Una barra de inercia variable admite una mayor carga de pandeo cuanto mayor es su grado de ahusamiento, para un valor concreto de su momento de inercia mínimo,  $I_a$ .
  2. Una barra de inercia variable biarticulada tiene la misma carga de pandeo que una biempotrada con posibilidad de desplazamiento relativo entre extremos. Este resultado es independiente del grado de ahusamiento de la barra.
  3. En el caso de una barra de inercia variable con un extremo empotrado y otro libre, si el extremo empotrado es el de mayor inercia, la carga de pandeo es mayor que si el empotramiento está en el extremo de menor inercia. Esta diferencia es tanto más acusada cuanto mayor sea el grado de ahusamiento de la barra.
  4. Curiosamente, para el caso de la barra empotrada en un extremo y articulada en el otro, la carga de pandeo es idéntica si el empotramiento se realiza en el extremo de mayor o menor inercia, cosa que no ocurre en el caso de la barra empotrada-libre.
- De igual manera, al aplicar las fórmulas para la *flecha*, el *momento*, y la *longitud de pandeo*, obtenemos los siguientes resultados:
  1. Para todas las barras de inercia variable se obtienen curvas para la deformada,  $v(x)$ , de tipo senoidal, pero no periódicas, a diferencia de las curvas para barras de inercia constante. Esto se debe a que, en este caso, las ecuaciones de  $v(x)$  tienen como argumento un logaritmo neperiano que hace que la curva se “estire” en cada ciclo, de tal manera

que la distancia entre puntos de inflexión de la deformada es creciente. Además, dichas curvas,  $v(x)$ , aumentan su amplitud en cada ciclo. Estas curiosidades matemáticas se traducen en una asimetría de la flecha y el momento para la barra de inercia variable, lo cual es lógico, ya que también existe una asimetría en la inercia de la barra.

2. La longitud de pandeo de una barra biarticulada es siempre igual a la propia longitud de la barra, es decir,  $\beta = 1$ , sea cual sea el grado de ahusamiento de la barra. Esto ya fue demostrado anteriormente por López Aguilar en su trabajo [22]. En este trabajo, hemos podido ver que esto también ocurre para la barra biempotrada con desplazamiento relativo entre extremos.
3. La longitud de pandeo de una barra empotrada-libre (empotrada en extremo de menor inercia) disminuye a medida que aumenta el grado de ahusamiento de la barra. Y lo contrario sucede en el caso de la barra libre-empotrada (empotrada en extremo de mayor inercia). Esto es algo que en principio puede parecer paradójico, ya que se podría intuir que si empotramos en el extremo de mayor inercia, la resistencia a pandeo es mayor, y por tanto, la longitud de pandeo debería ser menor, para que la carga de pandeo fuese mayor. Sin embargo, en este trabajo hemos podido comprobar que la barra libre-empotrada tiene mayor longitud de pandeo que la empotrada-libre, a pesar de que la carga de pandeo de la primera sea mayor.
4. La longitud de pandeo de una barra biempotrada disminuye a medida que aumenta su grado de ahusamiento.
5. La longitud de pandeo de una barra empotrada-articulada (empotrada en extremo de menor inercia) aumenta con el grado de ahusamiento. Y lo contrario sucede en el caso de la barra articulada-empotrada (empotrada en extremo de mayor inercia).

#### **b) Modelización de las columnas de inercia variable (cinco casos de Euler) como columnas equivalentes de inercia constante**

Se ha conseguido modelizar la barra ideal de inercia variable como una barra ideal de inercia constante. Para ello, se ha definido una barra biarticulada de inercia constante equivalente que tiene la misma carga de pandeo y longitud de pandeo que la barra de inercia variable. Esta modelización permite conocer la esbeltez mecánica de la barra de inercia constante equivalente, que es representativa de la verdadera esbeltez mecánica de la barra de inercia

variable. Al trabajar ya con una barra equivalente de inercia constante, es fácil pasar de la columna ideal a la columna real, aplicando cualquier método para barras de inercia constante mostrado en la bibliografía o en la normativa, como por ejemplo el método de Dutheil.

El parámetro que hemos empleado para definir la columna equivalente es el momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ , que depende únicamente del grado de ahusamiento de la barra y de las condiciones de sustentación en los extremos (según casos de Euler). Este momento de inercia equivalente nos permite definir la posición de la sección equivalente de la barra,  $x_{eq}$ , así como el área equivalente,  $A_{eq}$ . Conocidas estas variables, podemos hallar la esbeltez mecánica equivalente,  $\lambda_{eq}$ .

### c) Descripción del pandeo de columnas de inercia variable con restricciones elásticas en sus extremos

Se ha conseguido describir física y matemáticamente el comportamiento exacto frente a pandeo de una columna ideal de inercia variable con restricciones elásticas frente al giro en sus extremos,  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ . Concretamente, se han definido de manera exacta las fórmulas matemáticas para la carga de pandeo y para la longitud de pandeo, al igual que hemos hecho en los cinco casos de Euler. El considerar que los extremos de la barra tienen una cierta rigidez frente al giro, permite modelizar multitud de casos en el que los extremos de la barra no están articulados, empotrados o libres, sino que se encuentran en una situación intermedia, en lo que a sus condiciones de enlace se refiere. Y estos casos de rigidez intermedia en los extremos, son los que se presentan en una barra en cuyos nudos extremos concurren otras barras, es decir, podemos modelizar cualquier barra que forme parte de una estructura más compleja si conocemos las rigideces de los nudos extremos de la barra. En este trabajo se ha establecido una metodología para definir, de manera aproximada, esas rigideces en los nudos de la barra, y así poder estimar, de manera no exacta pero sí suficientemente precisa, el comportamiento frente a pandeo de una barra de inercia variable que pertenezca a un sistema estructural más complejo.

Puesto que las rigideces en los nudos,  $R_{kA}$  y  $R_{kB}$ , son matemáticamente poco manejables (toman valores entre  $\infty$  y 0), se ha optado por emplear los llamados coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , que varían entre 0 (extremo empotrado) y 1 (extremo articulado o libre), los cuales nos permiten una mayor facilidad de cálculo.

Tenemos por tanto unas fórmulas analíticas para la carga y la longitud de pandeo, dependientes del coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ , y de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . Dichas fórmulas son excesivamente complejas, y por ello, se ha optado por mostrar los resultados en forma de ábacos o diagramas, y en forma de tablas (Anejo A). Los ábacos muestran curvas de nivel con coordenadas  $(\gamma, \eta_A^*, \eta_B^*)$  para la carga de pandeo y la longitud de pandeo, las cuales nos permiten ver la tendencia que siguen las variables a medida que el ahusamiento,  $\gamma$ , aumenta. Por otra parte, los resultados mostrados en tablas nos permiten una mayor precisión.

Como es lógico, en los casos en los que los coeficientes de distribución toman valores extremos (0 y 1), se obtienen los mismos resultados, para la carga y la longitud de pandeo, que aplicando las fórmulas particulares de los cinco casos de Euler, comentadas en el apartado a).

#### **d) Modelización de las columnas de inercia variable, con restricciones elásticas en sus extremos, como columnas equivalentes de inercia constante**

Al igual que se ha hecho para los cinco casos de Euler, en el caso de que la barra de inercia variable tenga sus nudos extremos en condiciones de empotramiento intermedias, también hemos obtenido un modelo de columna equivalente de inercia constante. La única diferencia es que, en este caso, el momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ , no sólo depende del coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ , sino que también es dependiente de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ . En lo demás, la metodología es similar a la expuesta para los casos de Euler.

### **9.1.2. Resultados referentes al objetivo 2 (Capítulo 8)**

#### **a) Metodología práctica de cálculo para barras de inercia variable**

En base a los resultados teóricos comentados anteriormente, se ha establecido una metodología práctica para el cálculo de pandeo en barras de inercia variable con muy diversas condiciones de sustentación en sus extremos, incluyéndose las condiciones asociadas a una barra que pertenece a una estructura más compleja. La metodología se muestra detalladamente en el capítulo 8 de este trabajo, pero se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Caracterización de la geometría y propiedades elásticas de la barra.  
Cálculo del coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ .

2. Caracterización de las condiciones de sustentación en los extremos. Cálculo de los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ .
3. Cálculo de la carga de pandeo,  $P_p$ .
4. Cálculo del coeficiente de esbeltez,  $\beta_\gamma$ , y de la longitud de pandeo,  $L_k$ .
5. Cálculo del momento de inercia equivalente,  $I_{eq}$ .
6. Cálculo del área equivalente,  $A_{eq}$ .
7. Cálculo de la esbeltez mecánica equivalente,  $\lambda_{eq}$ .

Es importante destacar que esta metodología proporciona resultados exactos siempre que los coeficientes de distribución,  $\eta_A^*$  y  $\eta_B^*$ , sean también exactos. Por ello, los resultados serán exactos para los cinco casos de Euler, donde sabemos con certeza que estos coeficientes toman únicamente los valores 0 y 1. En el caso en que los coeficientes de distribución no sean exactos (barras con restricciones elásticas en los extremos), los resultados obtenidos serán aproximados.

### 9.1.3. Resultados referentes al objetivo 4 (Capítulo 8)

Se han resuelto diversos problemas, algunos de ellos propuestos en la bibliografía, para ejemplificar el modo de aplicación de nuestra metodología, y para comparar los resultados con los obtenidos a partir de otros métodos o especificaciones de la normativa.

Como se ha comentado anteriormente, los resultados son exactos en los casos de Euler (Problemas 1, 2 y 3), y aproximados en los casos de barras pertenecientes a estructuras (Problemas 4 y 5). No obstante, comparando estos resultados aproximados con los exactos obtenidos por López Aguilar [22] para pórticos a dos aguas, hemos podido comprobar que los errores son más que asumibles.

## 9.2. Conclusiones

- Se ha realizado con este trabajo una aportación al cálculo de pandeo por flexión en barras de inercia variable, cubriendo, en nuestra opinión, un vacío de información sobre el tema, que hasta ahora había sido abordado casi exclusivamente desde el punto de vista de los métodos numéricos de cálculo.

- Al basarse nuestro análisis en la vía de cálculo analítica, hemos obtenido una visión global del fenómeno de pandeo en barras de inercia variable, entendiendo su esencia, y observando cómo varía el comportamiento de la barra cuando son modificados ciertos parámetros. En definitiva hemos realizado un análisis cualitativo, además del cuantitativo, en el que los métodos numéricos se centran exclusivamente.
- Se ha elaborado una metodología de cálculo de pandeo que proporciona soluciones exactas siempre que se conozcan con exactitud las características elásticas de los nudos de las barras. Si estas últimas se estiman de manera aproximada, las soluciones del cálculo de pandeo también serán aproximadas. No obstante, se ha comprobado que las aproximaciones suelen ser suficientemente aceptables.
- La metodología de cálculo aquí propuesta es de tipo general, y engloba el caso en el que la barra tiene inercia constante, siendo este sólo un caso particular. Las fórmulas que se proponen en este trabajo, cuando son llevadas al límite en el que la barra tiende a ser de inercia constante, se transforman en las fórmulas correspondientes a barras de inercia constante, lo cual es una confirmación de que nuestra formulación es correcta.
- La aplicación de la metodología de cálculo es bastante sencilla, gracias a la elaboración de tablas y ábacos que facilitan la resolución de ecuaciones muy complejas. Además, esta metodología es muy versátil y permite calcular el comportamiento frente a pandeo de multitud de barras pertenecientes a diferentes tipos de estructuras.

En cuanto a las perspectivas futuras generadas por este trabajo, cabe decir que la metodología aquí expuesta es fácilmente programable a nivel informático, lo que permitiría resolver estructuras muy complejas que serían inviables de manera manual.

También debemos destacar que en este trabajo nos hemos centrado únicamente en el pandeo por flexión de barras de inercia variable según la ley de Timoshenko (3.1). Pero existen todavía muchas vías de investigación no exploradas, en las que probar, por ejemplo, otras leyes de variación de inercia, y otros tipos de fenómenos inestables como el pandeo por flexo-torsión.

# Bibliografía

- [1] Argüelles, R. 1975. *La estructura metálica hoy*. Ed. Librería Técnica Bellisco. Madrid.
- [2] Argüelles, R. 1996. *Análisis de estructuras: Teoría, problemas y programas*. Ed. Fundación Conde del Valle de Salazar. Madrid.
- [3] Baker, G. 1996. *Exact deflections in non-prismatic members*. Computers & Structures. Vol. 61.
- [4] Ballio, G. y Mazzolani, F.M. 1983. *Theory and design of steel structures*. Ed. Chapman and Hall. London.
- [5] Belluzi, O. 1967. *Ciencia de la construcción*. Ed. Aguilar. Madrid.
- [6] Bradford, M.A. 1988. *Stability of tapered I-beams*. Journal of Constructional Steel Research. Vol. 9.
- [7] Chajes, A. 1974. *Principles of structural stability theory*. Ed. Prentice-Hall. New Jersey.
- [8] Chen, W.F. y Lui, E.M. 1987. *Structural stability. Theory and implementation*. Ed. Elsevier. New York.
- [9] Cudós, V. y Quintero, F. 1988. *Estructuras metálicas. La pieza aislada. Inestabilidad*. Ed. Fundación Escuela de la Edificación. Madrid.
- [10] Ermopoulos, J.Ch. 1986. *Buckling of tapered bars under stepped axial loads*. Journal of Structural Engineering. Vol. 122.
- [11] Ermopoulos, J.Ch. 1988. *Slope-deflection method and bending of tapered bars under stepped loads*. Journal of Constructional Steel Research. Vol. 11.
- [12] Ermopoulos, J.Ch. 1999. *Buckling length of non-uniform members under stepped axial loads*. Computer & Structures. Vol. 73.

- [13] Eurocódigo 3. 1993. *Proyecto de estructuras de acero*. Normas UNE-ENV. Eurocódigos estructurales.
- [14] Euler, L. 1744. *De curvis elasticis*. Ed. Lausanne and Geneva.
- [14] Galambos, T.V. 1987. *Guide to stability design criteria for metal structures*. Ed. Wiley. New York.
- [15] Garth Smith, W. 1988. *Analytic solutions for tapered column buckling*. Computers & Structures. Vol. 28.
- [16] Gil de Antuña y Rodríguez, J.M. y García Gómez, R.M. 1984. *Ecuaciones diferenciales*. Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- [17] Harrison, H.B. 1980. *Structural analysis and design*. Ed. Pergamon. Oxford.
- [18] Li, Q.S., Cao, H. y Li, G. 1995. *Stability analysis of bars with varying cross-section*. International Journal of Solids and Structures. Vol. 32
- [19] Li, Q.S., Cao, H. y Li, G. 2000. *Buckling of elastically restrained non-uniform columns*. Engineering Structures. Vol. 22.
- [20] Li, Q.S., Cao, H. y Li, G. 2001. *Analytical solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with arbitrary distribution of flexural stiffness or axial distributed loading*. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 43.
- [21] Li, Q.S., Cao, H. y Li, G. 2003. *Buckling analysis of non-uniform bars with rotational and translational springs*. Engineering Structures. Vol. 25.
- [22] López Aguilar, Martín. 1993. *Análisis de segundo orden de pórticos a dos aguas con elementos de inercia variable y varias condiciones de sustentación*. TPFC (ETSIAM, Córdoba).
- [23] *Manual of steel construction*. 1986. AISC. Chicago.
- [24] Meek, J.L. 1971. *Structural analysis*. Ed. McGraw-Hill. New York.
- [25] NBE-EA-95. 1995. *Estructuras de acero en edificación*. B.O.E. 18-01-96.
- [26] Ortiz Herrera, J. *Nota relativa a la determinación de longitudes de pandeo en los pórticos metálicos a dos aguas*. Informes de la Construcción, nº 324.

- [27] Rey Pastor, J. y Brzezicki, A.C. 1964. *Elementos de matemáticas*. Ed. S.A.E.T.A. Madrid.
- [28] Rey Pastor, J. y Brzezicki, A.C. 1958. *Funciones de Bessel. Teoría matemática y aplicaciones a la ciencia y la técnica*. Ed. Dossat. Madrid.
- [29] Sadd, M.H. 2005. *Elasticity. Theory, applications, and numerics*. Ed. Elsevier. New York.
- [30] Timoshenko, S.P. y Gere, J.M. 1961. *Theory of elastic stability*. Ed. McGraw-Hill. New York.
- [31] Tuma, J.J. y Munshi, R.K. 1971. *Análisis estructural avanzado*. Ed. McGraw-Hill. México.
- [32] Wyle, C.R. 1969. *Matemáticas superiores para ingenieros*. Ed. McGraw-Hill. México.

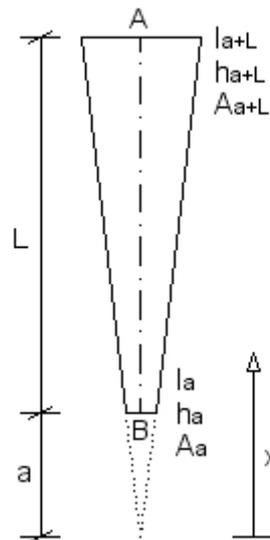
# ANEJO A

# ÍNDICE

<b>1. FÓRMULAS GENERALES PARA EL CÁLCULO DE PANDEO POR FLEXIÓN EN BARRAS DE INERCIA VARIABLE .....</b>	<b>3</b>
1.1. GEOMETRÍA Y CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DE LA BARRA DE INERCIA VARIABLE.....	3
1.2. FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE PANDEO.....	4
<b>2. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE PANDEO (<math>m, \beta_\gamma, b</math>) PARA BARRAS AISLADAS DE INERCIA VARIABLE, EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE AHUSAMIENTO, <math>\gamma</math> .....</b>	<b>5</b>
2.1. BARRA BIARTICULADA.....	5
2.2. BARRA EMPOTRADA-LIBRE .....	6
2.3. BARRA LIBRE-EMPOTRADA .....	6
2.4. BARRA BIEMPOTRADA.....	7
2.5. BARRA BIEMPOTRADA CON DESPLAZAMIENTO RELATIVO .....	7
2.6. BARRA EMPOTRADA-ARTICULADA.....	8
2.7. BARRA ARTICULADA-EMPOTRADA.....	8
<b>3. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE PANDEO (<math>m, \beta_\gamma, b</math>) PARA BARRAS DE INERCIA VARIABLE PERTENECIENTES A UNA ESTRUCTURA, EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE AHUSAMIENTO, <math>\gamma</math> .....</b>	<b>9</b>
3.1. ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES (TIPO I-A Y II-A).....	9
3.2. ESTRUCTURAS TRASLACIONALES (TIPO I-B Y II-B) .....	23

# 1. FÓRMULAS GENERALES PARA EL CÁLCULO DE PANDEO POR FLEXIÓN EN BARRAS DE INERCIA VARIABLE

## 1.1. GEOMETRÍA Y CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DE LA BARRA DE INERCIA VARIABLE



*Barra de inercia variable*

$L$ , Longitud de la barra

$a$ , Longitud de convergencia

$h_a$ , Canto mínimo

$h_{a+L}$ , Canto máximo

$I_a$ , Momento de inercia mínimo

$I_{a+L}$ , Momento de inercia máximo

$A_a$ , Área mínima

$A_{a+L}$ , Área máxima

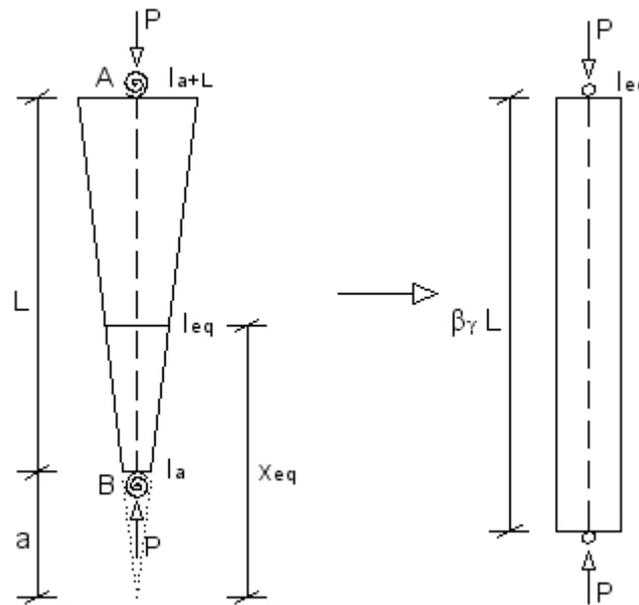
$I(x) = I_a \left( \frac{x}{a} \right)^2$ , Ley de inercia

$A(x)$ , Ley de área

$\gamma = \frac{L}{a} = \frac{h_{a+L} - h_a}{h_a} = \sqrt{\frac{I_{a+L}}{I_a}} - 1$ , Coeficiente de ahusamiento

$E$ , Módulo de elasticidad del material

## 1.2. FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE PANDEO



*Columna equivalente*

$$P_p = \frac{mEI_a}{L^2} \equiv \frac{\pi^2 EI_{eq}}{\beta_\gamma^2 L^2}, \text{ Carga de pandeo}$$

$$L_k = \beta_\gamma L, \text{ Longitud de pandeo}$$

$$I_{eq} = I(x_{eq}) = bI_a, \text{ Momento de inercia equivalente}$$

$$A_{eq} = A(x_{eq}), \text{ Área equivalente}$$

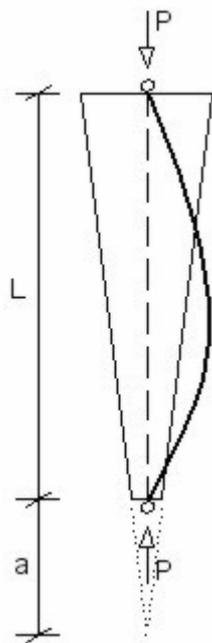
$$x_{eq} = \frac{\sqrt{b}}{\gamma} L, \text{ Abscisa de la sección equivalente}$$

$$\lambda_{eq} = \frac{L_k}{i_{eq}}, \text{ Esbeltez mecánica equivalente}$$

$$i_{eq} = \sqrt{\frac{I_{eq}}{A_{eq}}}, \text{ Radio de giro equivalente}$$

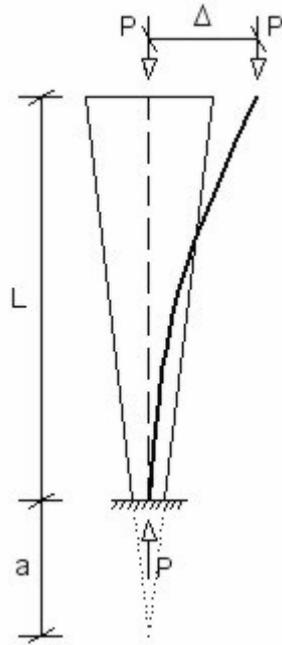
**2. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE PANDEO ( $m$ ,  $\beta_\gamma$ ,  $b$ ) PARA BARRAS AISLADAS DE INERCIA VARIABLE, EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE AHUSAMIENTO,  $\gamma$**

**2.1. BARRA BIARTICULADA**



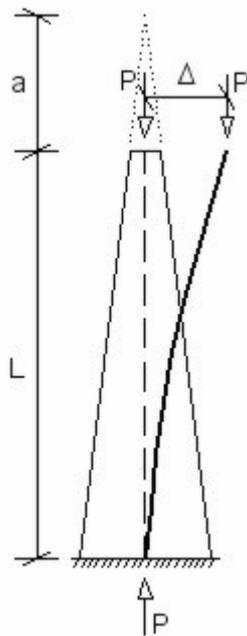
$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	$\pi^2 \approx 9,87$	1,00	1,00
0,1	10,87	1,00	1,10
0,2	11,89	1,00	1,20
0,3	12,93	1,00	1,31
0,4	13,99	1,00	1,42
0,5	15,07	1,00	1,53
0,6	16,17	1,00	1,64
0,7	17,30	1,00	1,75
0,8	18,44	1,00	1,87
0,9	19,61	1,00	1,99
1,0	20,79	1,00	2,11
1,1	22,00	1,00	2,23
1,2	23,22	1,00	2,35
1,3	24,47	1,00	2,48
1,4	25,73	1,00	2,61
1,5	27,01	1,00	2,74
1,6	28,31	1,00	2,87
1,7	29,63	1,00	3,00
1,8	30,97	1,00	3,14
1,9	32,33	1,00	3,28
2,0	33,71	1,00	3,41

## 2.2. BARRA EMPOTRADA-LIBRE



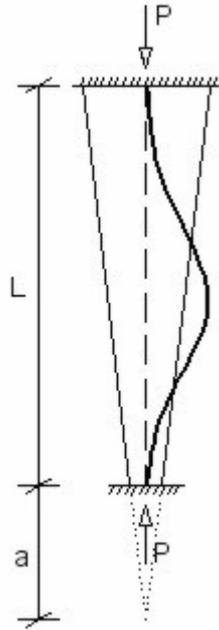
$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	$\pi^2 / 4 \approx 2,47$	2,00	1,00
0,1	2,61	1,94	1,00
0,2	2,76	1,89	1,00
0,3	2,90	1,85	1,00
0,4	3,03	1,81	1,00
0,5	3,17	1,77	1,01
0,6	3,31	1,74	1,01
0,7	3,44	1,70	1,01
0,8	3,57	1,67	1,01
0,9	3,71	1,65	1,02
1,0	3,84	1,62	1,02
1,1	3,97	1,60	1,02
1,2	4,09	1,57	1,03
1,3	4,22	1,55	1,03
1,4	4,35	1,53	1,03
1,5	4,48	1,51	1,04
1,6	4,60	1,50	1,04
1,7	4,73	1,48	1,05
1,8	4,85	1,46	1,05
1,9	4,97	1,45	1,06
2,0	5,10	1,43	1,06

## 2.3. BARRA LIBRE-EMPOTRADA



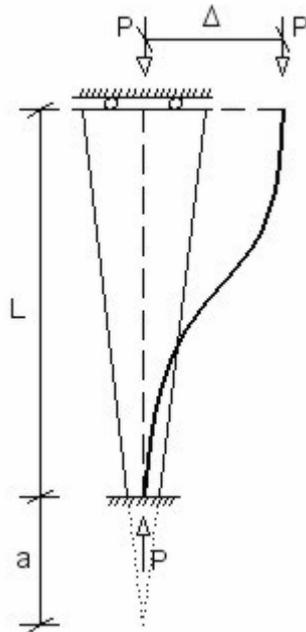
$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	$\pi^2 / 4 \approx 2,47$	2,00	1,00
0,1	2,82	2,06	1,21
0,2	3,19	2,11	1,44
0,3	3,58	2,16	1,69
0,4	3,99	2,20	1,96
0,5	4,41	2,24	2,26
0,6	4,84	2,28	2,57
0,7	5,29	2,32	2,90
0,8	5,76	2,36	3,26
0,9	6,24	2,39	3,63
1,0	6,73	2,42	4,03
1,1	7,24	2,45	4,44
1,2	7,76	2,48	4,88
1,3	8,30	2,51	5,34
1,4	8,85	2,54	5,81
1,5	9,42	2,56	6,31
1,6	10,00	2,59	6,83
1,7	10,59	2,61	7,37
1,8	11,19	2,63	7,93
1,9	11,81	2,66	8,51
2,0	12,44	2,68	9,11

## 2.4. BARRA BIEMPOTRADA



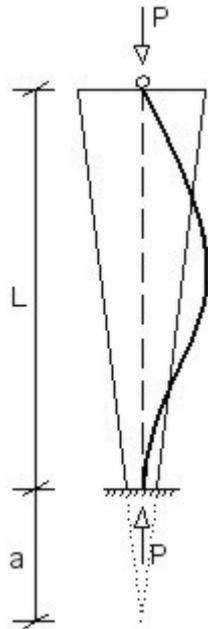
$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	$4\pi^2 \approx 39,48$	<b>0,50</b>	<b>1,00</b>
0,1	<b>43,46</b>	<b>0,49</b>	<b>1,05</b>
0,2	<b>47,52</b>	<b>0,48</b>	<b>1,10</b>
0,3	<b>51,64</b>	<b>0,47</b>	<b>1,14</b>
0,4	<b>55,83</b>	<b>0,46</b>	<b>1,19</b>
0,5	<b>60,10</b>	<b>0,45</b>	<b>1,23</b>
0,6	<b>64,43</b>	<b>0,44</b>	<b>1,27</b>
0,7	<b>68,83</b>	<b>0,43</b>	<b>1,31</b>
0,8	<b>73,29</b>	<b>0,43</b>	<b>1,35</b>
0,9	<b>77,82</b>	<b>0,42</b>	<b>1,39</b>
1,0	<b>82,42</b>	<b>0,41</b>	<b>1,43</b>
1,1	<b>87,08</b>	<b>0,41</b>	<b>1,47</b>
1,2	<b>91,81</b>	<b>0,40</b>	<b>1,51</b>
1,3	<b>96,60</b>	<b>0,40</b>	<b>1,54</b>
1,4	<b>101,45</b>	<b>0,39</b>	<b>1,58</b>
1,5	<b>106,36</b>	<b>0,39</b>	<b>1,62</b>
1,6	<b>111,33</b>	<b>0,38</b>	<b>1,65</b>
1,7	<b>116,37</b>	<b>0,38</b>	<b>1,69</b>
1,8	<b>121,47</b>	<b>0,37</b>	<b>1,72</b>
1,9	<b>126,62</b>	<b>0,37</b>	<b>1,76</b>
2,0	<b>131,84</b>	<b>0,37</b>	<b>1,79</b>

## 2.5. BARRA BIEMPOTRADA CON DESPLAZAMIENTO RELATIVO



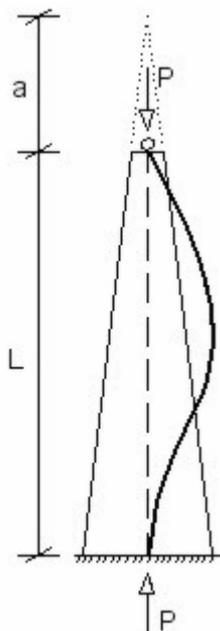
$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	$\pi^2 \approx 9,87$	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>
0,1	<b>10,87</b>	<b>1,00</b>	<b>1,10</b>
0,2	<b>11,89</b>	<b>1,00</b>	<b>1,20</b>
0,3	<b>12,93</b>	<b>1,00</b>	<b>1,31</b>
0,4	<b>13,99</b>	<b>1,00</b>	<b>1,42</b>
0,5	<b>15,07</b>	<b>1,00</b>	<b>1,53</b>
0,6	<b>16,17</b>	<b>1,00</b>	<b>1,64</b>
0,7	<b>17,30</b>	<b>1,00</b>	<b>1,75</b>
0,8	<b>18,44</b>	<b>1,00</b>	<b>1,87</b>
0,9	<b>19,61</b>	<b>1,00</b>	<b>1,99</b>
1,0	<b>20,79</b>	<b>1,00</b>	<b>2,11</b>
1,1	<b>22,00</b>	<b>1,00</b>	<b>2,23</b>
1,2	<b>23,22</b>	<b>1,00</b>	<b>2,35</b>
1,3	<b>24,47</b>	<b>1,00</b>	<b>2,48</b>
1,4	<b>25,73</b>	<b>1,00</b>	<b>2,61</b>
1,5	<b>27,01</b>	<b>1,00</b>	<b>2,74</b>
1,6	<b>28,31</b>	<b>1,00</b>	<b>2,87</b>
1,7	<b>29,63</b>	<b>1,00</b>	<b>3,00</b>
1,8	<b>30,97</b>	<b>1,00</b>	<b>3,14</b>
1,9	<b>32,33</b>	<b>1,00</b>	<b>3,28</b>
2,0	<b>33,71</b>	<b>1,00</b>	<b>3,41</b>

## 2.6. BARRA EMPOTRADA-ARTICULADA



$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	<b>20,19</b>	<b>0,70</b>	<b>1,00</b>
0,1	<b>22,23</b>	<b>0,71</b>	<b>1,10</b>
0,2	<b>24,30</b>	<b>0,72</b>	<b>1,27</b>
0,3	<b>26,41</b>	<b>0,73</b>	<b>1,41</b>
0,4	<b>28,55</b>	<b>0,73</b>	<b>1,56</b>
0,5	<b>30,72</b>	<b>0,74</b>	<b>1,71</b>
0,6	<b>32,93</b>	<b>0,75</b>	<b>1,86</b>
0,7	<b>35,18</b>	<b>0,75</b>	<b>2,02</b>
0,8	<b>37,46</b>	<b>0,76</b>	<b>2,19</b>
0,9	<b>39,77</b>	<b>0,76</b>	<b>2,35</b>
1,0	<b>42,11</b>	<b>0,77</b>	<b>2,52</b>
1,1	<b>44,48</b>	<b>0,77</b>	<b>2,70</b>
1,2	<b>46,89</b>	<b>0,78</b>	<b>2,88</b>
1,3	<b>49,33</b>	<b>0,78</b>	<b>3,06</b>
1,4	<b>51,80</b>	<b>0,79</b>	<b>3,25</b>
1,5	<b>54,30</b>	<b>0,79</b>	<b>3,44</b>
1,6	<b>56,83</b>	<b>0,79</b>	<b>3,63</b>
1,7	<b>59,40</b>	<b>0,80</b>	<b>3,83</b>
1,8	<b>61,99</b>	<b>0,80</b>	<b>4,03</b>
1,9	<b>64,61</b>	<b>0,80</b>	<b>4,23</b>
2,0	<b>67,26</b>	<b>0,81</b>	<b>4,43</b>

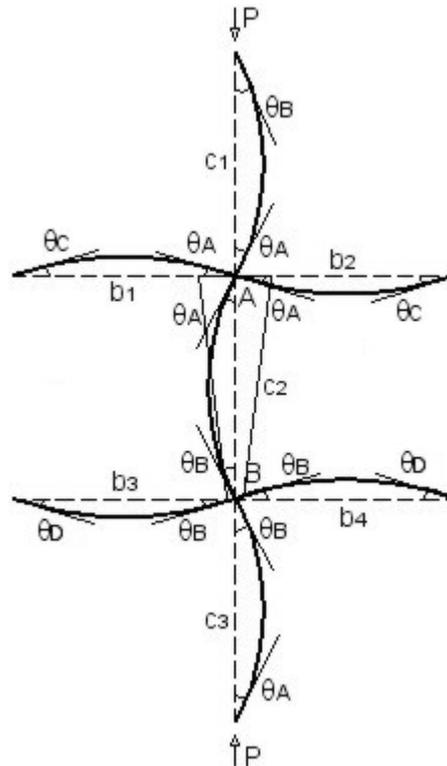
## 2.7. BARRA ARTICULADA-EMPOTRADA



$\gamma$	$m$	$\beta_\gamma$	$b$
0,0	<b>20,19</b>	<b>0,70</b>	<b>1,00</b>
0,1	<b>22,23</b>	<b>0,69</b>	<b>1,07</b>
0,2	<b>24,30</b>	<b>0,68</b>	<b>1,14</b>
0,3	<b>26,41</b>	<b>0,67</b>	<b>1,21</b>
0,4	<b>28,55</b>	<b>0,66</b>	<b>1,27</b>
0,5	<b>30,72</b>	<b>0,66</b>	<b>1,34</b>
0,6	<b>32,93</b>	<b>0,65</b>	<b>1,41</b>
0,7	<b>35,18</b>	<b>0,64</b>	<b>1,47</b>
0,8	<b>37,46</b>	<b>0,64</b>	<b>1,54</b>
0,9	<b>39,77</b>	<b>0,63</b>	<b>1,60</b>
1,0	<b>42,11</b>	<b>0,62</b>	<b>1,67</b>
1,1	<b>44,48</b>	<b>0,62</b>	<b>1,73</b>
1,2	<b>46,89</b>	<b>0,61</b>	<b>1,80</b>
1,3	<b>49,33</b>	<b>0,61</b>	<b>1,87</b>
1,4	<b>51,80</b>	<b>0,61</b>	<b>1,92</b>
1,5	<b>54,30</b>	<b>0,60</b>	<b>1,99</b>
1,6	<b>56,83</b>	<b>0,60</b>	<b>2,05</b>
1,7	<b>59,40</b>	<b>0,60</b>	<b>2,12</b>
1,8	<b>61,99</b>	<b>0,59</b>	<b>2,18</b>
1,9	<b>64,61</b>	<b>0,58</b>	<b>2,24</b>
2,0	<b>67,26</b>	<b>0,58</b>	<b>2,31</b>

### 3. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE PANDEO ( $m, \beta, b$ ) PARA BARRAS DE INERCIA VARIABLE PERTENECIENTES A UNA ESTRUCTURA, EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE AHUSAMIENTO, $\gamma$

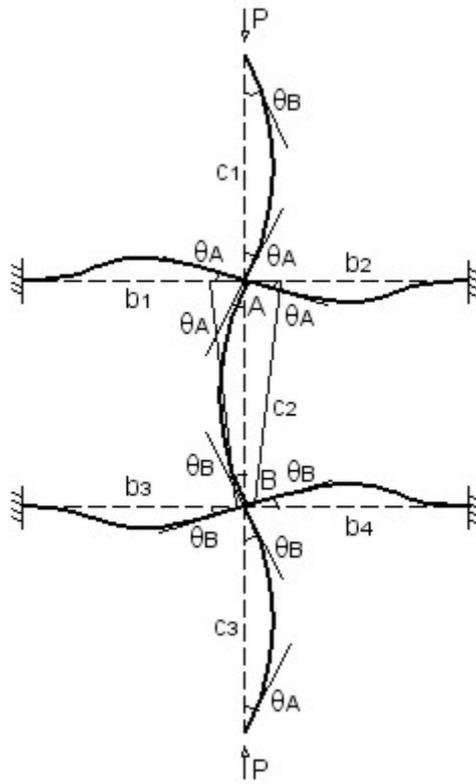
#### 3.1. ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES (TIPO I-A Y II-A)



*ESTRUCTURA TIPO I-A (General)*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(1 - \frac{\Gamma_A}{2}\right) \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]} \quad \Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A}$$

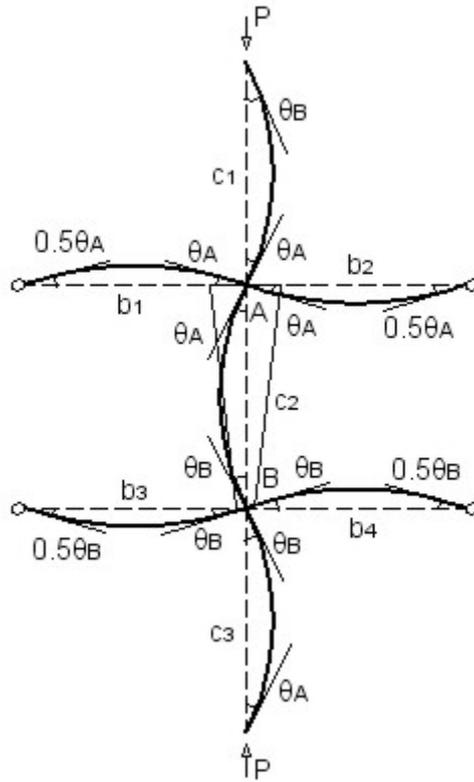
$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \left(1 - \frac{\Gamma_B}{2}\right) \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]} \quad \Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B}$$



*ESTRUCTURA TIPO I-A.1*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2}} \quad \theta_C = 0 \Rightarrow \Gamma_A = 0$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4}} \quad \theta_D = 0 \Rightarrow \Gamma_B = 0$$



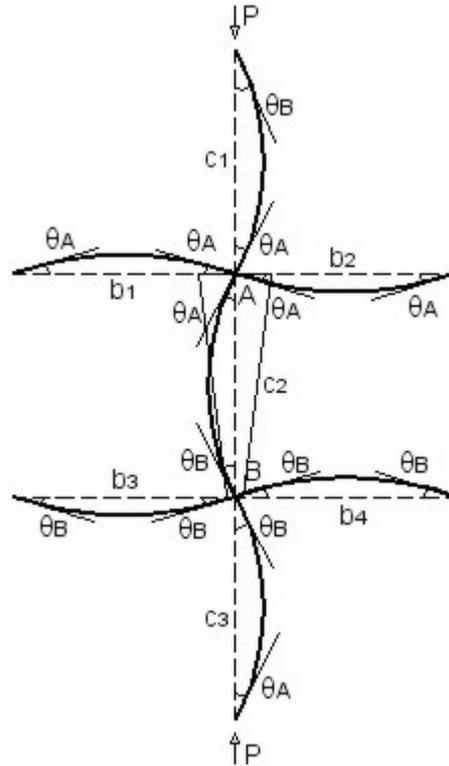
ESTRUCTURA TIPO I-A.2

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_C = \frac{1}{2} \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = \frac{1}{2}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]}$$

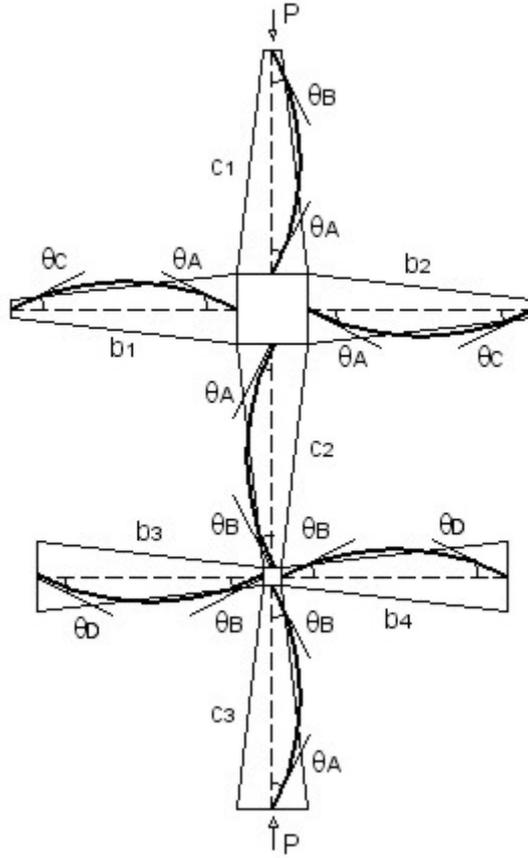
$$\theta_D = \frac{1}{2} \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = \frac{1}{2}$$



*ESTRUCTURA TIPO I-A.3*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]} \quad \theta_C = \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = 1$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]} \quad \theta_D = \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = 1$$



*ESTRUCTURA TIPO II-A (General)*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii} - z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2}\right]}$$

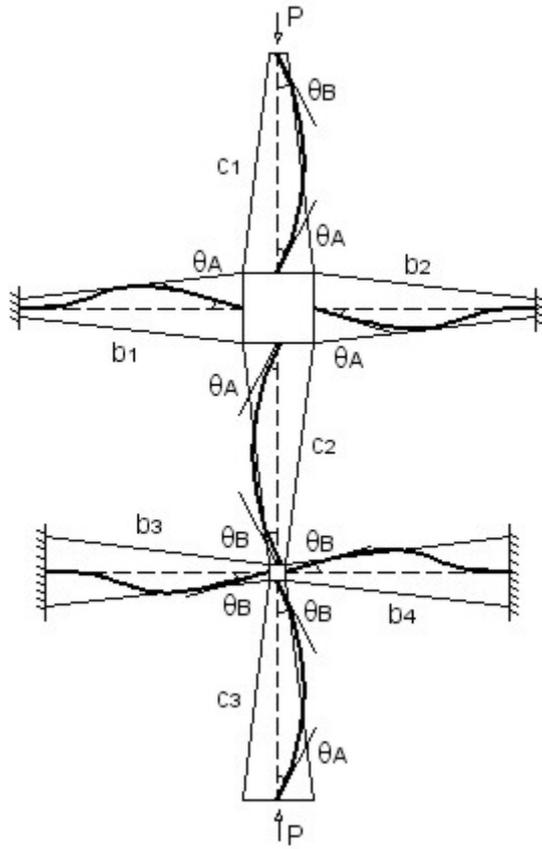
$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj} - z_{\gamma_b ji} \Gamma_B}{4}\right) \left[\left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4}\right]}$$

$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B}$$

$\gamma_b$	$z_{\gamma_b ii}$	$z_{\gamma_b ij} = z_{\gamma_b ji}$	$z_{\gamma_b jj}$
0,0	<b>4,00</b>	<b>2,00</b>	<b>4,00</b>
0,1	<b>4,62</b>	<b>2,20</b>	<b>4,20</b>
0,2	<b>5,27</b>	<b>2,40</b>	<b>4,39</b>
0,3	<b>5,95</b>	<b>2,61</b>	<b>4,58</b>
0,4	<b>6,67</b>	<b>2,81</b>	<b>4,76</b>
0,5	<b>7,42</b>	<b>3,02</b>	<b>4,95</b>
0,6	<b>8,20</b>	<b>3,22</b>	<b>5,12</b>
0,7	<b>9,01</b>	<b>3,43</b>	<b>5,30</b>
0,8	<b>9,86</b>	<b>3,64</b>	<b>5,47</b>
0,9	<b>10,73</b>	<b>3,85</b>	<b>5,65</b>
1,0	<b>11,64</b>	<b>4,07</b>	<b>5,82</b>
1,1	<b>12,57</b>	<b>4,28</b>	<b>5,98</b>
1,2	<b>13,53</b>	<b>4,49</b>	<b>6,15</b>
1,3	<b>14,53</b>	<b>4,71</b>	<b>6,31</b>
1,4	<b>15,55</b>	<b>4,92</b>	<b>6,48</b>
1,5	<b>16,60</b>	<b>5,14</b>	<b>6,64</b>
1,6	<b>17,68</b>	<b>5,36</b>	<b>6,80</b>
1,7	<b>18,79</b>	<b>5,58</b>	<b>6,96</b>
1,8	<b>19,93</b>	<b>5,80</b>	<b>7,12</b>
1,9	<b>21,09</b>	<b>6,02</b>	<b>7,27</b>
2,0	<b>22,30</b>	<b>6,24</b>	<b>7,43</b>

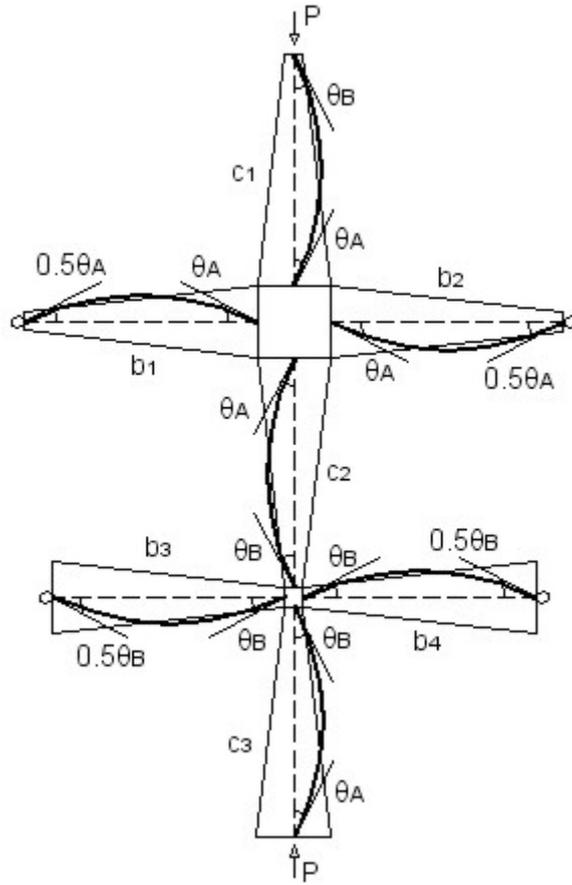
*Tabla 1*



*ESTRUCTURA TIPO II-A.1*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]} \quad \theta_C = 0 \Rightarrow \Gamma_A = 0$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]} \quad \theta_D = 0 \Rightarrow \Gamma_B = 0$$



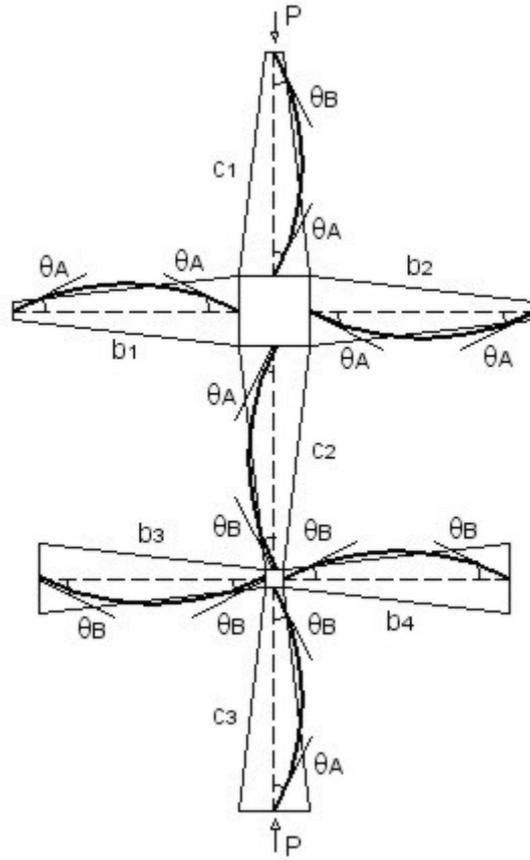
ESTRUCTURA TIPO II-A.2

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii}}{4} - \frac{z_{\gamma_b jj}}{8}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_C = \frac{1}{2} \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = \frac{1}{2}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj}}{4} - \frac{z_{\gamma_b ii}}{8}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]}$$

$$\theta_D = \frac{1}{2} \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = \frac{1}{2}$$



*ESTRUCTURA TIPO II-A.3*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii} - z_{\gamma_b jj}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_C = \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = 1$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj} - z_{\gamma_b ii}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]}$$

$$\theta_D = \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = 1$$

$m$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	39,48	37,33	35,16	32,83	30,58	28,41	26,42	24,60	22,94	21,53	20,19
	0,1	37,33	35,40	33,41	31,25	29,05	27,04	25,10	23,43	21,81	20,43	19,18
	0,2	35,16	33,41	31,47	29,48	27,46	25,60	23,81	22,09	20,61	19,27	18,06
	0,3	32,83	31,25	29,48	27,67	25,81	24,01	22,37	20,79	19,36	18,06	16,89
	0,4	30,58	29,05	27,46	25,81	24,11	22,47	20,88	19,45	18,15	16,89	15,76
	0,5	28,41	27,04	25,60	24,01	22,47	20,98	19,54	18,15	16,89	15,68	14,67
	0,6	26,42	25,10	23,81	22,37	20,88	19,54	18,15	16,89	15,68	14,59	13,54
	0,7	24,60	23,43	22,09	20,79	19,45	18,15	16,89	15,68	14,52	13,54	12,53
	0,8	22,94	21,81	20,61	19,36	18,15	16,89	15,68	14,52	13,47	12,53	11,63
	0,9	21,53	20,43	19,27	18,06	16,89	15,68	14,59	13,54	12,53	11,56	10,69
	1,0	20,19	19,18	18,06	16,89	15,76	14,67	13,54	12,53	11,63	10,69	9,87

Tabla 2

$\beta_\gamma$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	0,50	0,51	0,53	0,55	0,57	0,59	0,61	0,63	0,66	0,68	0,70
	0,1	0,51	0,53	0,54	0,56	0,58	0,60	0,63	0,65	0,67	0,70	0,72
	0,2	0,53	0,54	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,67	0,69	0,72	0,74
	0,3	0,55	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,76
	0,4	0,57	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,76	0,79
	0,5	0,59	0,60	0,62	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,76	0,79	0,82
	0,6	0,61	0,63	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,76	0,79	0,82	0,85
	0,7	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,74	0,76	0,79	0,82	0,85	0,89
	0,8	0,66	0,67	0,69	0,71	0,74	0,76	0,79	0,82	0,86	0,89	0,92
	0,9	0,68	0,70	0,72	0,74	0,76	0,79	0,82	0,85	0,89	0,92	0,96
	1,0	0,70	0,72	0,74	0,76	0,79	0,82	0,85	0,89	0,92	0,96	1,00

Tabla 3

$b$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,6	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,7	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,9	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabla 4

$m$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	<b>60,10</b>	<b>54,38</b>	<b>49,27</b>	<b>45,02</b>	<b>41,54</b>	<b>38,75</b>	<b>36,48</b>	<b>34,64</b>	<b>33,07</b>	<b>31,82</b>	<b>30,72</b>
	0,1	<b>56,09</b>	<b>51,04</b>	<b>46,37</b>	<b>42,38</b>	<b>39,13</b>	<b>36,48</b>	<b>34,34</b>	<b>32,55</b>	<b>31,09</b>	<b>29,87</b>	<b>28,79</b>
	0,2	<b>52,12</b>	<b>47,53</b>	<b>43,29</b>	<b>39,63</b>	<b>36,60</b>	<b>34,23</b>	<b>32,15</b>	<b>30,48</b>	<b>29,06</b>	<b>27,89</b>	<b>26,84</b>
	0,3	<b>48,30</b>	<b>44,15</b>	<b>40,26</b>	<b>36,91</b>	<b>34,11</b>	<b>31,82</b>	<b>29,93</b>	<b>28,36</b>	<b>27,05</b>	<b>25,92</b>	<b>24,96</b>
	0,4	<b>44,68</b>	<b>40,96</b>	<b>37,39</b>	<b>34,34</b>	<b>31,76</b>	<b>29,66</b>	<b>27,84</b>	<b>26,38</b>	<b>25,11</b>	<b>24,07</b>	<b>23,15</b>
	0,5	<b>41,54</b>	<b>38,07</b>	<b>34,81</b>	<b>31,99</b>	<b>29,60</b>	<b>27,57</b>	<b>25,92</b>	<b>24,52</b>	<b>23,34</b>	<b>22,34</b>	<b>21,45</b>
	0,6	<b>38,75</b>	<b>35,47</b>	<b>32,44</b>	<b>29,82</b>	<b>27,57</b>	<b>25,72</b>	<b>24,12</b>	<b>22,82</b>	<b>21,69</b>	<b>20,77</b>	<b>19,91</b>
	0,7	<b>36,30</b>	<b>33,24</b>	<b>30,37</b>	<b>27,89</b>	<b>25,77</b>	<b>24,02</b>	<b>22,53</b>	<b>21,27</b>	<b>20,22</b>	<b>19,29</b>	<b>18,51</b>
	0,8	<b>34,23</b>	<b>31,25</b>	<b>28,52</b>	<b>26,17</b>	<b>24,17</b>	<b>22,48</b>	<b>21,08</b>	<b>19,91</b>	<b>18,90</b>	<b>18,00</b>	<b>17,24</b>
	0,9	<b>32,32</b>	<b>29,49</b>	<b>26,89</b>	<b>24,66</b>	<b>22,77</b>	<b>21,13</b>	<b>19,78</b>	<b>18,64</b>	<b>17,66</b>	<b>16,83</b>	<b>16,10</b>
	1,0	<b>30,72</b>	<b>27,94</b>	<b>25,46</b>	<b>23,29</b>	<b>21,45</b>	<b>19,91</b>	<b>18,64</b>	<b>17,53</b>	<b>16,59</b>	<b>15,78</b>	<b>15,07</b>

Tabla 5

$\beta_\gamma$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	<b>0,45</b>	<b>0,48</b>	<b>0,52</b>	<b>0,56</b>	<b>0,59</b>	<b>0,62</b>	<b>0,65</b>	<b>0,68</b>	<b>0,70</b>	<b>0,72</b>	<b>0,74</b>
	0,1	<b>0,47</b>	<b>0,50</b>	<b>0,54</b>	<b>0,57</b>	<b>0,61</b>	<b>0,64</b>	<b>0,67</b>	<b>0,69</b>	<b>0,72</b>	<b>0,74</b>	<b>0,76</b>
	0,2	<b>0,50</b>	<b>0,53</b>	<b>0,56</b>	<b>0,59</b>	<b>0,63</b>	<b>0,66</b>	<b>0,69</b>	<b>0,71</b>	<b>0,74</b>	<b>0,76</b>	<b>0,79</b>
	0,3	<b>0,52</b>	<b>0,55</b>	<b>0,58</b>	<b>0,62</b>	<b>0,65</b>	<b>0,68</b>	<b>0,71</b>	<b>0,74</b>	<b>0,76</b>	<b>0,79</b>	<b>0,81</b>
	0,4	<b>0,54</b>	<b>0,57</b>	<b>0,60</b>	<b>0,64</b>	<b>0,67</b>	<b>0,70</b>	<b>0,73</b>	<b>0,76</b>	<b>0,79</b>	<b>0,81</b>	<b>0,84</b>
	0,5	<b>0,56</b>	<b>0,59</b>	<b>0,63</b>	<b>0,66</b>	<b>0,69</b>	<b>0,72</b>	<b>0,75</b>	<b>0,78</b>	<b>0,81</b>	<b>0,84</b>	<b>0,86</b>
	0,6	<b>0,58</b>	<b>0,62</b>	<b>0,65</b>	<b>0,68</b>	<b>0,72</b>	<b>0,75</b>	<b>0,78</b>	<b>0,81</b>	<b>0,84</b>	<b>0,86</b>	<b>0,89</b>
	0,7	<b>0,60</b>	<b>0,64</b>	<b>0,67</b>	<b>0,71</b>	<b>0,74</b>	<b>0,77</b>	<b>0,80</b>	<b>0,83</b>	<b>0,86</b>	<b>0,89</b>	<b>0,92</b>
	0,8	<b>0,62</b>	<b>0,66</b>	<b>0,69</b>	<b>0,73</b>	<b>0,76</b>	<b>0,80</b>	<b>0,83</b>	<b>0,86</b>	<b>0,89</b>	<b>0,92</b>	<b>0,95</b>
	0,9	<b>0,64</b>	<b>0,67</b>	<b>0,71</b>	<b>0,75</b>	<b>0,79</b>	<b>0,82</b>	<b>0,85</b>	<b>0,89</b>	<b>0,91</b>	<b>0,94</b>	<b>0,97</b>
	1,0	<b>0,66</b>	<b>0,69</b>	<b>0,73</b>	<b>0,77</b>	<b>0,81</b>	<b>0,85</b>	<b>0,88</b>	<b>0,91</b>	<b>0,94</b>	<b>0,97</b>	<b>1,00</b>

Tabla 6

$b$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	<b>1,23</b>	<b>1,29</b>	<b>1,35</b>	<b>1,41</b>	<b>1,46</b>	<b>1,51</b>	<b>1,56</b>	<b>1,60</b>	<b>1,64</b>	<b>1,68</b>	<b>1,71</b>
	0,1	<b>1,27</b>	<b>1,31</b>	<b>1,37</b>	<b>1,42</b>	<b>1,46</b>	<b>1,51</b>	<b>1,55</b>	<b>1,59</b>	<b>1,62</b>	<b>1,66</b>	<b>1,69</b>
	0,2	<b>1,30</b>	<b>1,34</b>	<b>1,38</b>	<b>1,42</b>	<b>1,46</b>	<b>1,50</b>	<b>1,53</b>	<b>1,57</b>	<b>1,61</b>	<b>1,64</b>	<b>1,68</b>
	0,3	<b>1,32</b>	<b>1,35</b>	<b>1,38</b>	<b>1,42</b>	<b>1,45</b>	<b>1,49</b>	<b>1,52</b>	<b>1,55</b>	<b>1,59</b>	<b>1,62</b>	<b>1,66</b>
	0,4	<b>1,33</b>	<b>1,36</b>	<b>1,39</b>	<b>1,42</b>	<b>1,45</b>	<b>1,48</b>	<b>1,51</b>	<b>1,54</b>	<b>1,57</b>	<b>1,60</b>	<b>1,64</b>
	0,5	<b>1,33</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,41</b>	<b>1,44</b>	<b>1,47</b>	<b>1,49</b>	<b>1,52</b>	<b>1,55</b>	<b>1,58</b>	<b>1,62</b>
	0,6	<b>1,34</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,41</b>	<b>1,43</b>	<b>1,46</b>	<b>1,48</b>	<b>1,51</b>	<b>1,53</b>	<b>1,56</b>	<b>1,60</b>
	0,7	<b>1,34</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,40</b>	<b>1,43</b>	<b>1,45</b>	<b>1,47</b>	<b>1,50</b>	<b>1,52</b>	<b>1,55</b>	<b>1,58</b>
	0,8	<b>1,34</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,40</b>	<b>1,42</b>	<b>1,45</b>	<b>1,47</b>	<b>1,49</b>	<b>1,51</b>	<b>1,53</b>	<b>1,56</b>
	0,9	<b>1,34</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,40</b>	<b>1,42</b>	<b>1,44</b>	<b>1,46</b>	<b>1,48</b>	<b>1,50</b>	<b>1,52</b>	<b>1,55</b>
	1,0	<b>1,34</b>	<b>1,36</b>	<b>1,38</b>	<b>1,40</b>	<b>1,42</b>	<b>1,44</b>	<b>1,46</b>	<b>1,48</b>	<b>1,50</b>	<b>1,51</b>	<b>1,53</b>

Tabla 7

$m$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	82,42	70,81	62,50	56,80	52,67	49,67	47,45	45,68	44,21	43,02	42,11
	0,1	75,77	65,86	58,31	52,96	49,11	46,35	44,21	42,50	41,08	39,94	39,06
	0,2	69,81	60,93	54,13	49,11	45,54	43,02	40,95	39,31	38,07	36,97	36,13
	0,3	64,25	56,35	50,09	45,54	42,24	39,81	37,95	36,37	35,18	34,24	33,43
	0,4	59,39	52,09	46,49	42,24	39,19	36,97	35,18	33,77	32,63	31,61	30,83
	0,5	55,31	48,55	43,28	39,44	36,49	34,36	32,63	31,39	30,28	29,41	28,66
	0,6	51,80	45,41	40,45	36,85	34,12	32,06	30,50	29,19	28,23	27,39	26,67
	0,7	48,69	42,76	38,07	34,59	32,06	30,06	28,55	27,39	26,36	25,55	24,85
	0,8	46,22	40,45	35,89	32,63	30,17	28,34	26,88	25,75	24,85	24,06	23,39
	0,9	43,94	38,44	34,12	30,94	28,55	26,77	25,45	24,26	23,39	22,62	21,97
	1,0	42,11	36,61	32,51	29,41	27,19	25,45	24,06	23,00	22,15	21,41	20,79

Tabla 8

$\beta_\gamma$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	0,41	0,46	0,51	0,55	0,59	0,63	0,66	0,69	0,72	0,74	0,77
	0,1	0,44	0,49	0,53	0,57	0,61	0,65	0,68	0,71	0,74	0,77	0,79
	0,2	0,46	0,51	0,56	0,60	0,64	0,67	0,70	0,73	0,76	0,79	0,82
	0,3	0,49	0,54	0,58	0,62	0,66	0,69	0,72	0,75	0,78	0,81	0,84
	0,4	0,51	0,56	0,61	0,65	0,69	0,72	0,75	0,78	0,81	0,84	0,87
	0,5	0,54	0,58	0,63	0,67	0,71	0,74	0,77	0,80	0,83	0,86	0,89
	0,6	0,56	0,61	0,65	0,70	0,74	0,77	0,80	0,83	0,85	0,88	0,91
	0,7	0,58	0,63	0,68	0,72	0,76	0,79	0,82	0,85	0,88	0,90	0,94
	0,8	0,59	0,65	0,70	0,74	0,78	0,82	0,85	0,88	0,90	0,93	0,96
	0,9	0,61	0,66	0,72	0,77	0,81	0,84	0,87	0,90	0,93	0,95	0,98
	1,0	0,62	0,68	0,74	0,79	0,83	0,87	0,90	0,93	0,96	0,98	1,00

Tabla 9

$b$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,43	1,53	1,64	1,75	1,86	1,97	2,08	2,20	2,31	2,42	2,52
	0,1	1,48	1,58	1,67	1,77	1,87	1,96	2,06	2,16	2,27	2,37	2,48
	0,2	1,53	1,61	1,70	1,79	1,87	1,95	2,04	2,13	2,22	2,33	2,44
	0,3	1,56	1,64	1,72	1,80	1,87	1,94	2,02	2,09	2,18	2,28	2,39
	0,4	1,59	1,66	1,73	1,80	1,87	1,93	2,00	2,06	2,14	2,23	2,35
	0,5	1,61	1,68	1,74	1,81	1,87	1,92	1,98	2,04	2,11	2,19	2,30
	0,6	1,62	1,69	1,75	1,81	1,87	1,92	1,97	2,02	2,08	2,15	2,26
	0,7	1,64	1,70	1,76	1,82	1,87	1,92	1,96	2,01	2,06	2,12	2,22
	0,8	1,65	1,71	1,77	1,83	1,88	1,93	1,97	2,00	2,04	2,09	2,18
	0,9	1,66	1,72	1,78	1,84	1,89	1,94	1,97	2,01	2,04	2,08	2,14
	1,0	1,67	1,73	1,80	1,86	1,91	1,95	1,99	2,02	2,05	2,08	2,11

Tabla 10

$m$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	106,36	86,77	75,47	68,87	64,48	61,40	59,31	57,49	56,14	55,25	54,30
	0,1	96,21	79,95	69,87	63,53	59,54	56,59	54,59	53,05	51,76	50,69	49,84
	0,2	88,17	73,67	64,48	58,63	54,81	52,19	50,27	48,80	47,55	46,73	45,92
	0,3	80,75	67,64	59,31	54,14	50,69	48,17	46,33	44,92	43,73	42,94	42,17
	0,4	74,69	62,81	55,03	50,27	46,94	44,52	42,94	41,59	40,44	39,69	38,94
	0,5	69,62	58,40	51,33	46,73	43,73	41,59	39,88	38,57	37,65	36,92	36,20
	0,6	65,45	54,81	48,17	43,92	41,01	38,94	37,29	36,20	35,14	34,43	33,74
	0,7	61,87	51,76	45,52	41,39	38,57	36,56	35,14	33,91	33,05	32,37	31,70
	0,8	58,86	49,21	43,14	39,31	36,56	34,61	33,22	32,20	31,20	30,54	29,88
	0,9	56,36	47,14	41,20	37,29	34,79	32,88	31,53	30,54	29,56	28,92	28,44
	1,0	54,30	45,12	39,50	35,67	33,22	31,53	30,05	29,08	28,28	27,50	27,01

Tabla 11

$\beta_\gamma$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	0,39	0,45	0,50	0,55	0,59	0,62	0,66	0,69	0,73	0,76	0,79
	0,1	0,42	0,48	0,53	0,58	0,61	0,65	0,68	0,71	0,75	0,78	0,81
	0,2	0,44	0,50	0,56	0,60	0,64	0,67	0,71	0,74	0,77	0,80	0,84
	0,3	0,47	0,53	0,59	0,63	0,67	0,70	0,73	0,76	0,79	0,83	0,86
	0,4	0,49	0,56	0,61	0,66	0,70	0,73	0,76	0,79	0,82	0,85	0,89
	0,5	0,52	0,58	0,64	0,69	0,72	0,76	0,78	0,81	0,84	0,87	0,91
	0,6	0,54	0,61	0,66	0,71	0,75	0,78	0,81	0,84	0,86	0,89	0,93
	0,7	0,55	0,63	0,69	0,74	0,78	0,81	0,84	0,86	0,89	0,91	0,95
	0,8	0,57	0,65	0,71	0,76	0,80	0,84	0,86	0,89	0,91	0,93	0,97
	0,9	0,59	0,66	0,73	0,79	0,83	0,86	0,89	0,91	0,94	0,96	0,98
	1,0	0,60	0,68	0,75	0,81	0,85	0,89	0,92	0,94	0,96	0,99	1,00

Tabla 12

$b$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,62	1,78	1,94	2,09	2,25	2,42	2,60	2,80	3,00	3,22	3,44
	0,1	1,69	1,84	1,99	2,13	2,27	2,42	2,57	2,74	2,93	3,13	3,35
	0,2	1,75	1,89	2,03	2,16	2,29	2,41	2,54	2,69	2,85	3,05	3,27
	0,3	1,80	1,94	2,07	2,19	2,29	2,40	2,52	2,64	2,79	2,97	3,19
	0,4	1,84	1,97	2,10	2,21	2,31	2,40	2,50	2,60	2,73	2,89	3,11
	0,5	1,87	2,01	2,13	2,23	2,32	2,40	2,49	2,58	2,68	2,83	3,04
	0,6	1,90	2,04	2,15	2,25	2,34	2,41	2,49	2,56	2,65	2,77	2,96
	0,7	1,93	2,06	2,18	2,28	2,36	2,43	2,50	2,56	2,63	2,72	2,90
	0,8	1,95	2,09	2,21	2,31	2,39	2,46	2,51	2,57	2,62	2,69	2,84
	0,9	1,97	2,11	2,24	2,34	2,42	2,49	2,54	2,59	2,64	2,68	2,79
	1,0	1,99	2,14	2,26	2,37	2,45	2,52	2,58	2,63	2,67	2,71	2,74

Tabla 13

$m$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	131,84	102,20	88,61	81,28	77,04	73,93	71,90	70,22	68,90	67,91	67,26
	0,1	118,07	93,54	81,28	74,62	70,56	67,59	65,64	64,04	63,09	62,15	61,22
	0,2	107,09	85,64	74,62	68,24	64,68	61,84	59,98	58,76	57,55	56,65	56,06
	0,3	97,83	78,79	68,57	62,78	59,37	56,95	55,17	54,00	52,84	51,98	51,41
	0,4	90,49	72,91	63,73	58,15	54,88	52,84	51,13	49,72	48,89	48,06	47,51
	0,5	84,54	68,24	59,37	54,29	51,41	49,16	47,51	46,43	45,36	44,82	44,03
	0,6	79,85	64,04	55,76	51,13	48,06	46,16	44,56	43,51	42,73	41,96	41,45
	0,7	75,65	60,91	52,84	48,33	45,62	43,51	42,22	40,94	40,19	39,44	38,95
	0,8	72,23	58,15	50,56	46,16	43,25	41,45	39,94	38,95	38,21	37,48	37,00
	0,9	69,56	55,76	48,33	44,03	41,45	39,44	38,21	37,00	36,28	35,81	35,11
	1,0	67,26	53,71	46,43	42,22	39,69	37,97	36,52	35,57	34,87	34,18	33,71

Tabla 14

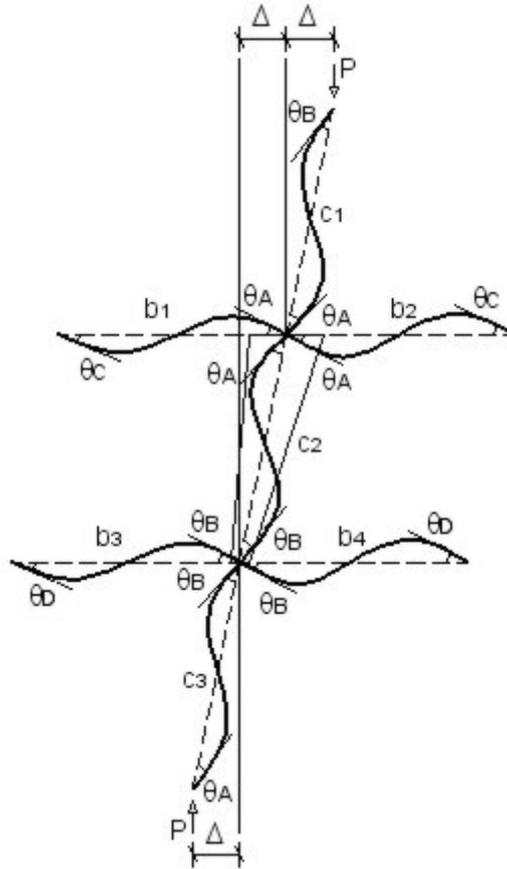
$\beta_\gamma$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	0,37	0,44	0,50	0,54	0,58	0,62	0,65	0,69	0,73	0,77	0,81
	0,1	0,40	0,47	0,53	0,58	0,61	0,65	0,68	0,72	0,75	0,79	0,83
	0,2	0,43	0,50	0,56	0,61	0,64	0,68	0,71	0,74	0,77	0,81	0,86
	0,3	0,45	0,53	0,59	0,64	0,68	0,71	0,74	0,76	0,80	0,84	0,88
	0,4	0,48	0,56	0,62	0,67	0,71	0,73	0,76	0,79	0,82	0,86	0,90
	0,5	0,50	0,58	0,65	0,70	0,73	0,77	0,79	0,82	0,85	0,88	0,92
	0,6	0,52	0,61	0,68	0,73	0,77	0,79	0,82	0,84	0,87	0,90	0,94
	0,7	0,54	0,63	0,70	0,75	0,79	0,82	0,85	0,87	0,89	0,92	0,96
	0,8	0,55	0,65	0,72	0,78	0,82	0,85	0,88	0,90	0,92	0,94	0,97
	0,9	0,57	0,67	0,75	0,81	0,85	0,88	0,90	0,93	0,94	0,96	0,99
	1,0	0,58	0,69	0,77	0,83	0,87	0,91	0,93	0,96	0,97	0,99	1,00

Tabla 15

$b$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,79	2,04	2,25	2,44	2,64	2,86	3,11	3,40	3,72	4,07	4,43
	0,1	1,88	2,12	2,32	2,50	2,68	2,87	3,08	3,32	3,61	3,93	4,30
	0,2	1,96	2,19	2,39	2,56	2,71	2,88	3,05	3,25	3,50	3,80	4,17
	0,3	2,03	2,26	2,45	2,61	2,74	2,88	3,03	3,20	3,41	3,68	4,04
	0,4	2,09	2,31	2,50	2,65	2,78	2,89	3,02	3,16	3,34	3,57	3,93
	0,5	2,14	2,36	2,55	2,70	2,81	2,92	3,03	3,14	3,28	3,48	3,81
	0,6	2,18	2,41	2,60	2,74	2,85	2,95	3,04	3,14	3,25	3,41	3,72
	0,7	2,22	2,46	2,65	2,79	2,90	2,99	3,07	3,15	3,24	3,36	3,63
	0,8	2,25	2,50	2,69	2,84	2,95	3,04	3,11	3,18	3,24	3,33	3,55
	0,9	2,31	2,54	2,74	2,89	3,00	3,10	3,16	3,23	3,28	3,33	3,41
	1,0	2,31	2,58	2,79	2,95	3,06	3,15	3,23	3,29	3,34	3,38	3,41

Tabla 16

### 3.2. ESTRUCTURAS TRASLACIONALES (TIPO I-B Y II-B)



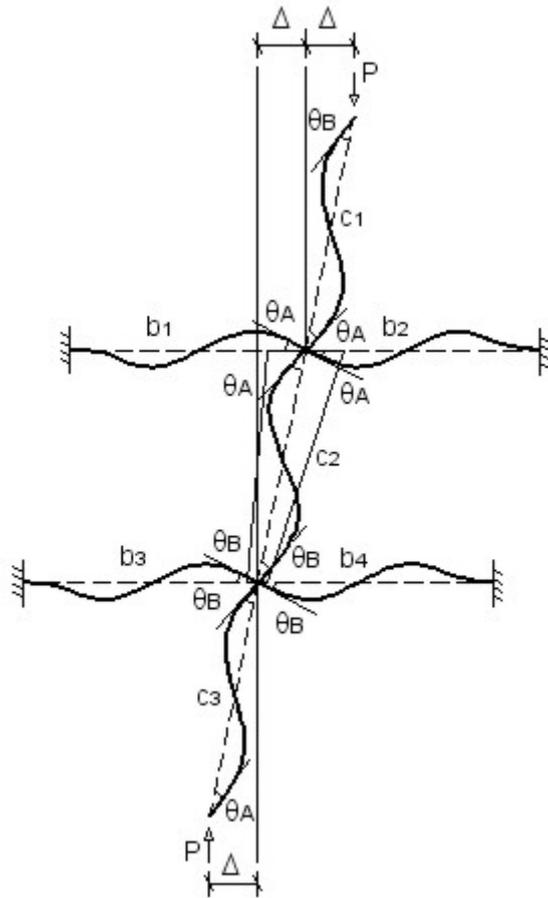
*ESTRUCTURA TIPO I-B (General)*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(1 + \frac{\Gamma_A}{2}\right) \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \left(1 + \frac{\Gamma_B}{2}\right) \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]}$$

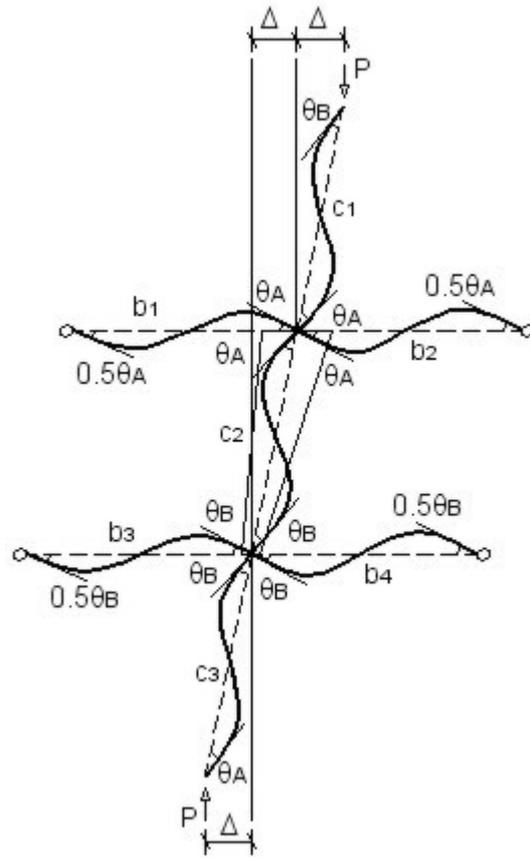
$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B}$$



*ESTRUCTURA TIPO I-B.1*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2}} \quad \theta_C = 0 \Rightarrow \Gamma_A = 0$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4}} \quad \theta_D = 0 \Rightarrow \Gamma_B = 0$$



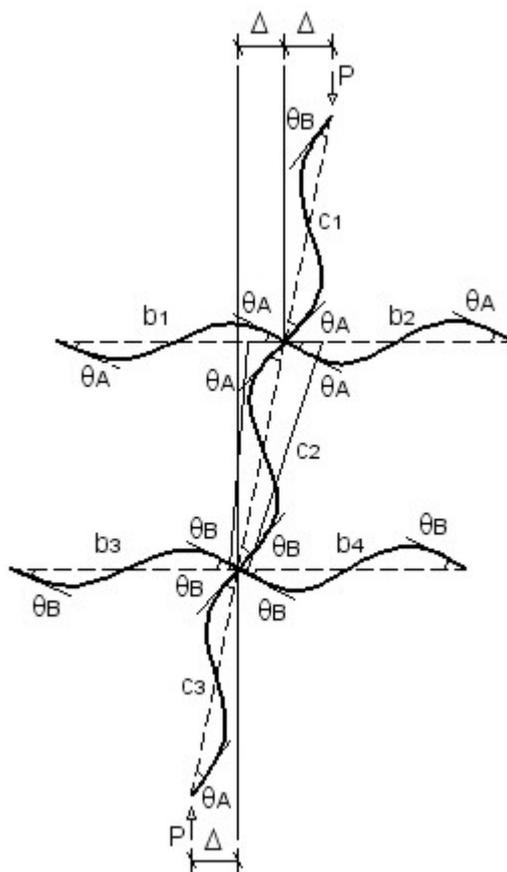
*ESTRUCTURA TIPO I-B.2*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \frac{5}{4} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_c = \frac{1}{2} \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = \frac{1}{2}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \frac{5}{4} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]}$$

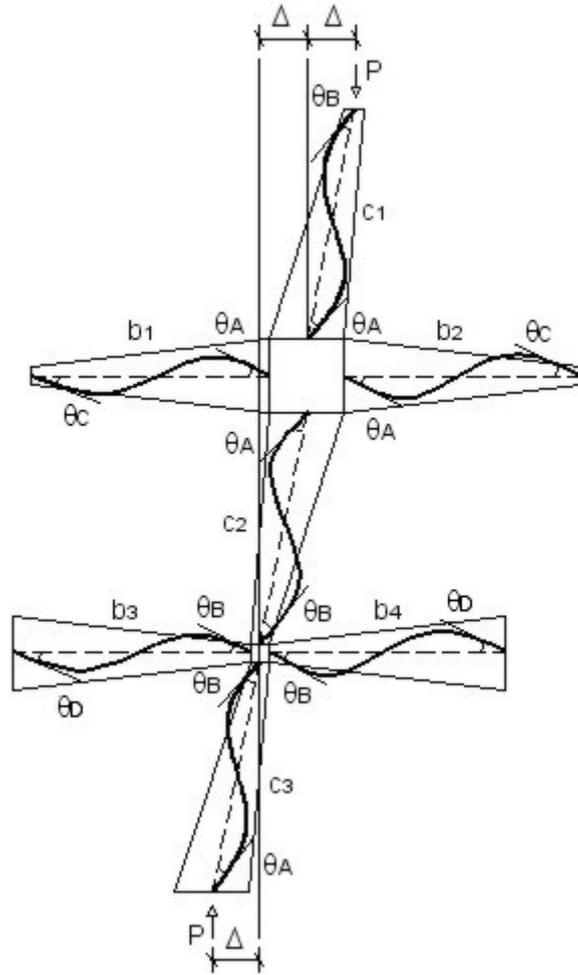
$$\theta_D = \frac{1}{2} \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = \frac{1}{2}$$



*ESTRUCTURA TIPO I-B.3*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b2} \right]} \quad \theta_C = \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = 1$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I}{L}\right)_{c3} + \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{I}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I}{L}\right)_{b4} \right]} \quad \theta_D = \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = 1$$



*ESTRUCTURA TIPO II-B (General)*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii} + z_{\gamma_b ij} \Gamma_A}{4}\right) \left[\left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2}\right]}$$

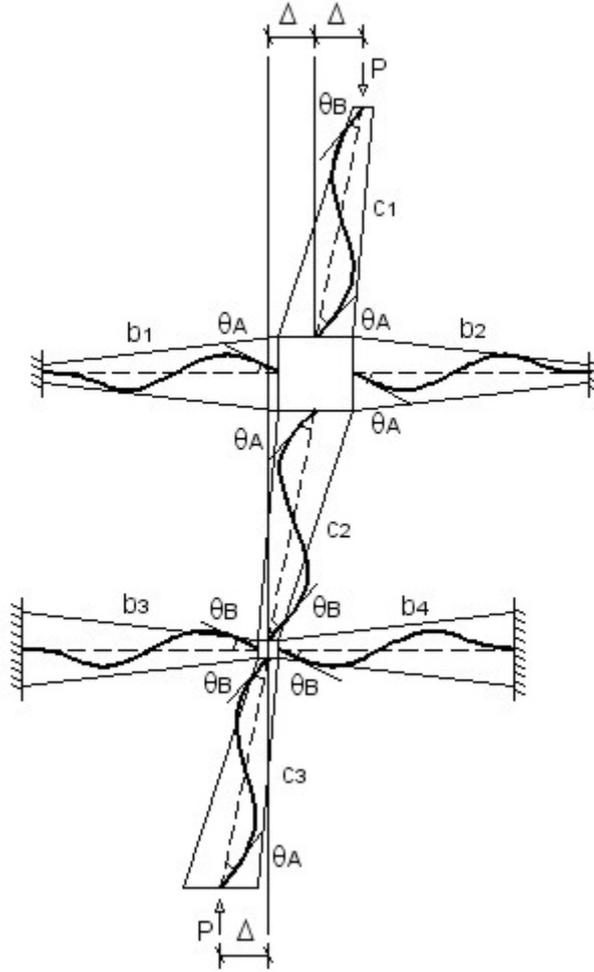
$$\Gamma_A = \frac{\theta_C}{\theta_A}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj} + z_{\gamma_b ji} \Gamma_B}{4}\right) \left[\left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4}\right]}$$

$$\Gamma_B = \frac{\theta_D}{\theta_B}$$

$\gamma_b$	$z_{\gamma_b i}$	$z_{\gamma_b ij} = z_{\gamma_b ji}$	$z_{\gamma_b jj}$
0,0	<b>4,00</b>	<b>2,00</b>	<b>4,00</b>
0,1	<b>4,62</b>	<b>2,20</b>	<b>4,20</b>
0,2	<b>5,27</b>	<b>2,40</b>	<b>4,39</b>
0,3	<b>5,95</b>	<b>2,61</b>	<b>4,58</b>
0,4	<b>6,67</b>	<b>2,81</b>	<b>4,76</b>
0,5	<b>7,42</b>	<b>3,02</b>	<b>4,95</b>
0,6	<b>8,20</b>	<b>3,22</b>	<b>5,12</b>
0,7	<b>9,01</b>	<b>3,43</b>	<b>5,30</b>
0,8	<b>9,86</b>	<b>3,64</b>	<b>5,47</b>
0,9	<b>10,73</b>	<b>3,85</b>	<b>5,65</b>
1,0	<b>11,64</b>	<b>4,07</b>	<b>5,82</b>
1,1	<b>12,57</b>	<b>4,28</b>	<b>5,98</b>
1,2	<b>13,53</b>	<b>4,49</b>	<b>6,15</b>
1,3	<b>14,53</b>	<b>4,71</b>	<b>6,31</b>
1,4	<b>15,55</b>	<b>4,92</b>	<b>6,48</b>
1,5	<b>16,60</b>	<b>5,14</b>	<b>6,64</b>
1,6	<b>17,68</b>	<b>5,36</b>	<b>6,80</b>
1,7	<b>18,79</b>	<b>5,58</b>	<b>6,96</b>
1,8	<b>19,93</b>	<b>5,80</b>	<b>7,12</b>
1,9	<b>21,09</b>	<b>6,02</b>	<b>7,27</b>
2,0	<b>22,30</b>	<b>6,24</b>	<b>7,43</b>

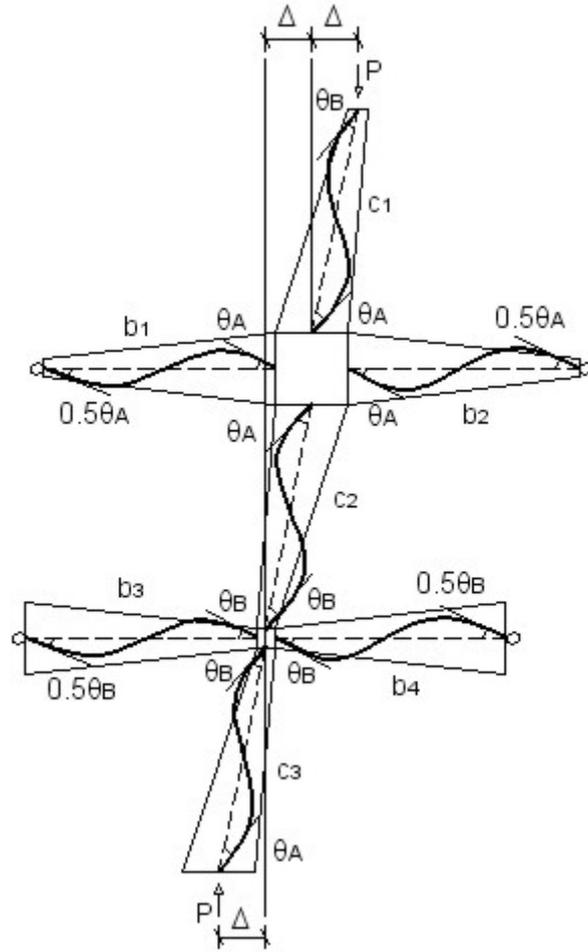
*Tabla 17*



*ESTRUCTURA TIPO II-B.1*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]} \quad \theta_C = 0 \Rightarrow \Gamma_A = 0$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]} \quad \theta_D = 0 \Rightarrow \Gamma_B = 0$$



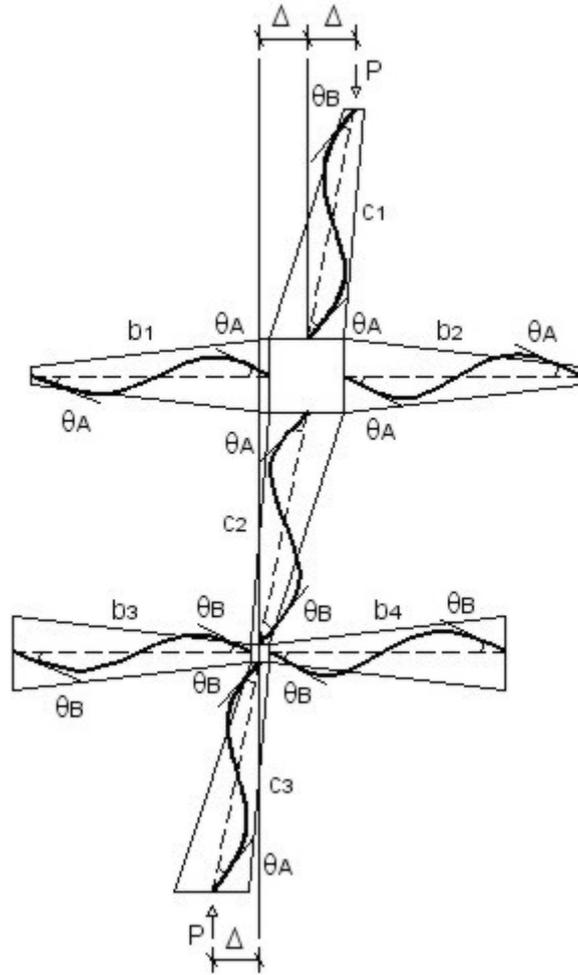
ESTRUCTURA TIPO II-B.2

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_b ii}}{4} + \frac{z_{\gamma_b ij}}{8}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_C = \frac{1}{2} \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = \frac{1}{2}$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_b jj}}{4} + \frac{z_{\gamma_b ji}}{8}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]}$$

$$\theta_D = \frac{1}{2} \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = \frac{1}{2}$$



*ESTRUCTURA TIPO II-B.3*

$$\eta_A^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{z_{\gamma_{bii}} + z_{\gamma_{bij}}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b1} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b2} \right]}$$

$$\theta_C = \theta_A \Rightarrow \Gamma_A = 1$$

$$\eta_B^* = \frac{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3}}{\left(\frac{I_a}{L}\right)_{c2} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{c3} + \left(\frac{z_{\gamma_{bji}} + z_{\gamma_{bji}}}{4}\right) \left[ \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b3} + \left(\frac{I_a}{L}\right)_{b4} \right]}$$

$$\theta_D = \theta_B \Rightarrow \Gamma_B = 1$$

$m$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	9,87	9,36	8,76	8,12	7,40	6,60	5,81	4,97	4,12	3,28	2,47
	0,1	9,36	8,88	8,29	7,67	7,02	6,30	5,52	4,75	3,92	3,13	2,34
	0,2	8,76	8,29	7,84	7,24	6,66	5,95	5,24	4,49	3,72	2,96	2,19
	0,3	8,12	7,73	7,24	6,76	6,20	5,57	4,88	4,20	3,50	2,76	2,02
	0,4	7,40	7,02	6,66	6,20	5,66	5,11	4,54	3,88	3,20	2,53	1,82
	0,5	6,60	6,30	5,95	5,57	5,11	4,62	4,08	3,50	2,89	2,25	1,59
	0,6	5,81	5,52	5,24	4,88	4,54	4,08	3,61	3,10	2,53	1,96	1,35
	0,7	4,97	4,75	4,49	4,20	3,88	3,50	3,10	2,62	2,13	1,61	1,06
	0,8	4,12	3,92	3,72	3,50	3,20	2,89	2,53	2,13	1,72	1,23	0,74
	0,9	3,28	3,13	2,96	2,76	2,53	2,25	1,96	1,61	1,23	0,83	0,38
	1,0	2,47	2,34	2,19	2,02	1,82	1,59	1,35	1,06	0,74	0,38	0,00

Tabla 18

$\beta_\gamma$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,03	1,06	1,10	1,15	1,22	1,30	1,41	1,55	1,74	2,00
	0,1	1,03	1,05	1,09	1,13	1,19	1,25	1,34	1,44	1,59	1,77	2,05
	0,2	1,06	1,09	1,12	1,17	1,22	1,29	1,37	1,48	1,63	1,83	2,12
	0,3	1,10	1,13	1,17	1,21	1,26	1,33	1,42	1,53	1,68	1,89	2,21
	0,4	1,15	1,19	1,22	1,26	1,32	1,39	1,47	1,59	1,76	1,98	2,33
	0,5	1,22	1,25	1,29	1,33	1,39	1,46	1,56	1,68	1,85	2,09	2,49
	0,6	1,30	1,34	1,37	1,42	1,47	1,56	1,65	1,78	1,98	2,24	2,71
	0,7	1,41	1,44	1,48	1,53	1,59	1,68	1,78	1,94	2,15	2,47	3,05
	0,8	1,55	1,59	1,63	1,68	1,76	1,85	1,98	2,15	2,40	2,83	3,65
	0,9	1,74	1,77	1,83	1,89	1,98	2,09	2,24	2,47	2,83	3,45	5,07
	1,0	2,00	2,05	2,12	2,21	2,33	2,49	2,71	3,05	3,65	5,07	-

Tabla 19

$b$ $\gamma = 0,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,6	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,7	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,9	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabla 20

$m$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	15,07	13,64	12,14	10,69	9,27	7,96	6,80	5,73	4,77	3,92	3,17
	0,1	14,09	12,81	11,45	10,08	8,77	7,54	6,44	5,42	4,49	3,67	2,95
	0,2	13,06	11,90	10,66	9,43	8,21	7,09	6,02	5,06	4,20	3,41	2,70
	0,3	11,97	10,92	9,83	8,71	7,63	6,57	5,59	4,69	3,87	3,11	2,43
	0,4	10,82	9,92	8,94	7,96	6,98	6,02	5,10	4,27	3,50	2,79	2,15
	0,5	9,64	8,88	8,04	7,16	6,31	5,42	4,60	3,83	3,11	2,45	1,84
	0,6	8,50	7,85	7,11	6,36	5,59	4,81	4,06	3,36	2,69	2,08	1,50
	0,7	7,41	6,82	6,19	5,54	4,86	4,16	3,50	2,85	2,25	1,69	1,15
	0,8	6,34	5,85	5,28	4,71	4,12	3,52	2,92	2,34	1,79	1,27	0,79
	0,9	5,35	4,90	4,43	3,92	3,39	2,87	2,34	1,82	1,32	0,85	0,39
	1,0	4,41	4,02	3,60	3,16	2,69	2,22	1,75	1,29	0,85	0,41	0,00

Tabla 21

$\beta_\gamma$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,05	1,10	1,17	1,24	1,33	1,42	1,53	1,65	1,78	1,77
	0,1	1,05	1,07	1,13	1,21	1,29	1,38	1,48	1,60	1,73	1,87	2,03
	0,2	1,12	1,20	1,18	1,25	1,34	1,44	1,56	1,69	1,83	1,99	2,17
	0,3	1,19	1,28	1,38	1,32	1,41	1,52	1,65	1,79	1,96	2,16	2,36
	0,4	1,28	1,36	1,47	1,61	1,49	1,62	1,77	1,94	2,13	2,37	2,62
	0,5	1,38	1,47	1,58	1,72	1,88	1,76	1,92	2,13	2,37	2,66	2,99
	0,6	1,50	1,59	1,71	1,85	2,05	2,30	2,13	2,38	2,71	3,10	3,60
	0,7	1,63	1,73	1,86	2,02	2,24	2,54	2,92	2,78	3,21	3,82	4,66
	0,8	1,80	1,91	2,05	2,24	2,48	2,81	3,30	4,03	4,05	5,18	7,13
	0,9	1,99	2,12	2,29	2,51	2,81	3,22	3,82	4,81	6,66	8,54	19,15
	1,0	2,24	2,40	2,61	2,88	3,27	3,82	4,70	6,23	9,80	26,66	-

Tabla 22

$b$ $\gamma = 0,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,53	1,51	1,50	1,47	1,45	1,43	1,39	1,36	1,31	1,25	1,01
	0,1	1,59	1,50	1,49	1,48	1,47	1,45	1,43	1,40	1,36	1,31	1,23
	0,2	1,65	1,73	1,51	1,50	1,50	1,49	1,48	1,46	1,42	1,37	1,29
	0,3	1,72	1,80	1,91	1,54	1,53	1,54	1,54	1,53	1,50	1,46	1,38
	0,4	1,79	1,86	1,97	2,10	1,58	1,60	1,62	1,63	1,62	1,59	1,50
	0,5	1,86	1,93	2,03	2,15	2,25	1,70	1,73	1,75	1,77	1,76	1,67
	0,6	1,93	2,00	2,10	2,22	2,38	2,59	1,87	1,93	2,00	2,03	1,98
	0,7	2,00	2,07	2,17	2,29	2,46	2,71	3,04	2,23	2,35	2,49	2,54
	0,8	2,08	2,15	2,26	2,39	2,57	2,83	3,22	3,85	2,97	3,46	4,04
	0,9	2,16	2,24	2,35	2,50	2,71	3,01	3,46	4,26	5,91	6,25	14,60
	1,0	2,26	2,36	2,49	2,66	2,92	3,29	3,92	5,10	8,23	29,57	-

Tabla 23

$m$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	20,79	17,81	15,07	12,64	10,62	8,95	7,54	6,35	5,40	4,53	3,84
	0,1	19,26	16,57	14,09	11,88	9,98	8,37	7,06	5,96	5,00	4,21	3,49
	0,2	17,64	15,30	13,07	11,01	9,31	7,81	6,55	5,49	4,58	3,82	3,17
	0,3	16,09	14,01	12,01	10,17	8,54	7,17	6,01	5,00	4,17	3,42	2,81
	0,4	14,46	12,71	10,94	9,25	7,81	6,55	5,45	4,53	3,71	3,04	2,41
	0,5	12,99	11,41	9,86	8,37	7,06	5,91	4,87	4,01	3,24	2,59	2,02
	0,6	11,54	10,17	8,78	7,49	6,30	5,22	4,29	3,49	2,78	2,18	1,62
	0,7	10,17	8,95	7,76	6,60	5,54	4,58	3,71	2,97	2,32	1,74	1,21
	0,8	8,95	7,87	6,80	5,77	4,79	3,94	3,14	2,44	1,84	1,29	0,81
	0,9	7,76	6,80	5,87	4,96	4,09	3,28	2,56	1,94	1,35	0,86	0,40
	1,0	6,73	5,87	5,00	4,17	3,38	2,65	2,02	1,42	0,89	0,43	0,00

Tabla 24

$\beta_\gamma$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,10	1,21	1,35	1,49	1,64	1,80	1,95	2,05	2,14	1,62
	0,1	1,06	1,15	1,27	1,41	1,57	1,74	1,92	2,09	2,25	2,34	2,36
	0,2	1,15	1,29	1,34	1,49	1,66	1,86	2,07	2,28	2,50	2,63	2,64
	0,3	1,23	1,39	1,58	1,59	1,79	2,02	2,26	2,54	2,80	3,04	3,06
	0,4	1,34	1,50	1,71	2,60	1,94	2,20	2,52	2,85	3,25	3,55	3,74
	0,5	1,46	1,63	1,85	2,16	2,13	2,44	2,86	3,31	3,89	4,47	4,81
	0,6	1,60	1,78	2,03	2,36	2,80	2,89	3,33	3,97	4,85	5,83	6,83
	0,7	1,76	1,97	2,24	2,61	3,12	3,83	4,58	4,93	6,35	8,64	11,84
	0,8	1,95	2,18	2,49	2,92	3,54	4,39	5,79	8,34	9,44	15,83	32,47
	0,9	2,18	2,45	2,81	3,32	4,07	5,26	7,22	10,84	20,91	46,18	-
	1,0	2,42	2,76	3,23	3,89	4,90	6,59	9,61	17,34	49,75	-	-

Tabla 25

$b$ $\gamma = 1,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	2,11	2,17	2,24	2,32	2,40	2,45	2,48	2,46	2,31	2,10	1,02
	0,1	2,21	2,22	2,29	2,38	2,48	2,58	2,63	2,63	2,56	2,33	1,98
	0,2	2,34	2,59	2,36	2,49	2,59	2,73	2,84	2,90	2,89	2,68	2,24
	0,3	2,48	2,73	3,05	2,60	2,78	2,96	3,12	3,28	3,30	3,19	2,67
	0,4	2,65	2,89	3,22	6,33	2,99	3,22	3,50	3,73	3,97	3,88	3,41
	0,5	2,81	3,08	3,43	3,96	3,25	3,56	4,03	4,46	4,98	5,25	4,73
	0,6	3,00	3,28	3,68	4,22	4,99	4,43	4,81	5,56	6,61	7,51	7,65
	0,7	3,21	3,53	3,95	4,57	5,45	6,82	7,89	7,33	9,48	13,15	17,18
	0,8	3,43	3,79	4,28	4,98	6,08	7,69	10,68	17,21	16,60	32,78	-
	0,9	3,72	4,14	4,71	5,55	6,88	9,18	13,51	23,08	59,94	-	-
	1,0	4,03	4,54	5,27	6,39	8,23	11,67	18,90	43,13	-	-	-

Tabla 26

$m$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	27,01	21,77	17,45	14,18	11,65	9,65	8,18	6,99	5,97	5,16	4,48
	0,1	24,77	20,14	16,24	13,20	10,87	9,03	7,61	6,39	5,49	4,66	4,02
	0,2	22,61	18,58	15,08	12,26	10,02	8,35	6,99	5,83	4,97	4,19	3,59
	0,3	20,41	16,97	13,85	11,26	9,21	7,61	6,32	5,29	4,42	3,70	3,09
	0,4	18,46	15,31	12,57	10,30	8,43	6,91	5,69	4,72	3,91	3,24	2,64
	0,5	16,48	13,85	11,35	9,29	7,61	6,18	5,10	4,13	3,38	2,72	2,19
	0,6	14,85	12,47	10,20	8,35	6,76	5,49	4,48	3,59	2,86	2,23	1,73
	0,7	13,20	11,16	9,12	7,45	6,04	4,85	3,86	3,04	2,34	1,76	1,27
	0,8	11,85	9,93	8,18	6,61	5,29	4,19	3,29	2,51	1,86	1,29	0,84
	0,9	10,58	8,86	7,22	5,76	4,60	3,59	2,72	2,00	1,37	0,85	0,64
	1,0	9,42	7,85	6,32	5,04	3,91	3,00	2,19	1,51	0,92	0,61	0,00

Tabla 27

$\beta_\gamma$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,17	1,37	1,60	1,86	2,15	2,41	2,64	2,83	2,83	1,51
	0,1	1,08	1,24	1,46	1,71	1,99	2,31	2,63	2,99	3,21	3,34	3,09
	0,2	1,17	1,40	1,55	1,83	2,18	2,53	2,94	3,42	3,76	4,01	3,73
	0,3	1,28	1,52	1,07	2,00	2,39	2,84	3,38	3,96	4,59	5,07	4,90
	0,4	1,40	1,67	2,03	2,16	2,64	3,22	3,93	4,75	5,72	6,59	6,77
	0,5	1,55	1,83	2,24	2,79	2,97	3,76	4,63	5,99	7,58	9,67	10,48
	0,6	1,70	2,01	2,48	3,12	4,08	4,48	5,69	7,76	10,91	16,19	20,67
	0,7	1,89	2,23	2,77	3,51	4,59	6,29	7,44	10,86	17,73	33,45	-
	0,8	2,08	2,49	3,09	3,99	5,38	7,66	11,75	16,90	34,73	-	-
	0,9	2,31	2,79	3,52	4,68	6,43	9,61	16,43	35,10	-	-	-
	1,0	2,56	3,15	4,08	5,52	8,09	13,00	26,19	-	-	-	-

Tabla 28

$b$ $\gamma = 1,5$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	2,74	3,00	3,32	3,69	4,08	4,52	4,80	4,93	4,83	4,19	1,04
	0,1	2,92	3,13	3,49	3,91	4,38	4,89	5,34	5,80	5,73	5,28	3,90
	0,2	3,13	3,68	3,65	4,17	4,81	5,43	6,12	6,92	7,12	6,85	5,07
	0,3	3,39	3,96	1,60	4,54	5,33	6,23	7,31	8,41	9,43	9,61	7,52
	0,4	3,66	4,32	5,27	4,87	5,93	7,24	8,91	10,81	12,96	14,25	12,23
	0,5	4,00	4,69	5,78	7,34	6,78	8,85	11,08	15,01	19,70	25,80	24,33
	0,6	4,33	5,11	6,37	8,21	11,40	11,17	14,73	21,93	34,48	59,15	-
	0,7	4,76	5,63	7,10	9,28	12,89	19,41	21,63	36,39	74,72	-	-
	0,8	5,19	6,26	7,91	10,67	15,50	24,93	45,98	72,58	-	-	-
	0,9	5,72	6,98	9,08	12,81	19,28	33,62	74,48	-	-	-	-
	1,0	6,31	7,90	10,68	15,55	25,93	51,34	-	-	-	-	-

Tabla 29

$m$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	33,71	25,40	19,49	15,29	12,42	10,36	8,73	7,55	6,57	5,75	5,10
	0,1	30,81	23,47	17,97	14,25	11,50	9,53	8,08	6,86	5,93	5,16	4,53
	0,2	27,83	21,61	16,68	13,11	10,61	8,73	7,35	6,20	5,33	4,53	3,96
	0,3	25,21	19,66	15,29	12,02	9,64	7,97	6,57	5,49	4,69	3,96	3,37
	0,4	22,72	17,81	13,96	10,99	8,84	7,15	5,93	4,84	4,10	3,37	2,85
	0,5	20,36	16,21	12,70	10,00	7,97	6,38	5,24	4,24	3,50	2,85	2,30
	0,6	18,47	14,69	11,50	8,95	7,15	5,67	4,53	3,62	2,90	2,30	1,77
	0,7	16,68	13,25	10,36	8,08	6,38	5,00	3,96	3,07	2,39	1,81	1,31
	0,8	15,14	12,02	9,29	7,25	5,67	4,39	3,37	2,54	1,88	1,31	1,03
	0,9	13,67	10,86	8,40	6,48	4,92	3,76	2,80	2,04	1,38	1,04	0,00
1,0	12,44	9,76	7,55	5,75	4,31	3,19	2,30	1,55	1,16	0,00	0,00	

Tabla 30

$\beta_\gamma$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	1,00	1,26	1,58	1,98	2,41	2,87	3,39	3,80	4,10	4,11	1,43
	0,1	1,09	1,35	1,72	2,14	2,66	3,24	3,83	4,52	5,03	5,19	4,55
	0,2	1,20	1,53	1,85	2,36	2,96	3,69	4,48	5,47	6,32	7,06	6,27
	0,3	1,31	1,69	2,02	2,62	3,39	4,25	5,49	7,01	8,50	10,09	9,69
	0,4	1,45	1,87	2,47	2,95	3,83	5,11	6,67	9,29	11,96	16,34	16,75
	0,5	1,62	2,07	2,75	3,75	4,50	6,28	8,60	12,84	18,94	29,60	41,09
	0,6	1,78	2,29	3,09	4,37	6,16	7,95	12,05	19,84	35,82	77,54	-
	0,7	1,98	2,57	3,50	5,01	7,38	11,99	16,88	33,67	81,82	-	-
	0,8	2,19	2,86	4,02	5,84	8,99	15,45	31,05	71,71	-	-	-
	0,9	2,44	3,23	4,59	6,93	11,68	22,11	55,95	-	-	-	-
1,0	2,68	3,68	5,32	8,43	15,29	34,39	-	-	-	-	-	

Tabla 31

$b$ $\gamma = 2,0$		$\eta_A^*$										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta_B^*$	0,0	3,41	4,08	4,94	6,07	7,33	8,66	10,17	11,03	11,20	9,83	1,06
	0,1	3,69	4,33	5,36	6,60	8,24	10,12	11,99	14,17	15,22	14,11	9,50
	0,2	4,04	5,13	5,77	7,39	9,39	12,03	14,96	18,77	21,54	22,92	15,74
	0,3	4,42	5,71	6,33	8,39	11,20	14,59	20,09	27,32	34,31	40,83	-
	0,4	4,86	6,34	8,63	9,67	13,14	18,92	26,71	42,31	59,43	-	-
	0,5	5,41	7,01	9,74	14,28	16,35	25,53	39,25	70,80	-	-	-
	0,6	5,95	7,82	11,12	17,35	27,53	36,25	66,70	-	-	-	-
	0,7	6,60	8,85	12,87	20,54	35,23	72,81	-	-	-	-	-
	0,8	7,33	9,99	15,20	25,03	46,44	-	-	-	-	-	-
	0,9	9,11	11,45	17,92	31,53	-	-	-	-	-	-	-
1,0	9,06	13,37	21,66	-	-	-	-	-	-	-	-	

Tabla 32