SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

RESUMEN TEÓRICO

1.- Definiciones.

Se llama **ECUACIÓN LINEAL O ECUACIÓN DE PRIMER GRADO** a una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k \quad (1)$$

en la que $a_1, a_2, \dots, a_n$, llamados **COEFICIENTES** y k llamado **TÉRMINO INDEPENDIENTE**, son en general números reales ó complejos; $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables que se suelen llamar **INDETERMINADAS O INCÓGNITAS**.

Si $K = 0$, se dice que la ecuación (1) es **HOMOGÉNEA**.

Se llama **SOLUCIÓN** de la ecuación (1) a un conjunto de números, en general, reales ó complejos, $r_1, r_2, \dots, r_n$ tales que:

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_nr_n = k$$

Diremos que dos ecuaciones son **EQUIVALENTES** cuando tienen la misma solución.

Se llama **SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES** a un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ . \ . \ . + a_{2n}x_n = k_2 \\ \ . \quad . \quad . \quad . \ . \ . \ . \quad . \quad . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ . \ . \ . + a_{mn}x_n = k_m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Se llama **SOLUCIÓN DE UN SISTEMA** de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de n números, en general reales ó complejos, que satisfacen todas las ecuaciones del sistema (2).

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales (s.e.l.) es **HOMOGÉNEO** cuando todas sus ecuaciones son homogéneas.

RESOLVER un sistema de ecuaciones lineales es hallar todas sus soluciones.

Los coeficientes de las incógnitas del sistema (2) ordenados en filas y columnas, tal como figuran en las ecuaciones del sistema, constituyen una matriz que llamamos **MATRIZ DEL SISTEMA** ó **MATRIZ DE LOS COEFICIENTES**, si a esta matriz se le agrega la columna formada por los términos independientes, que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones, se obtiene otra matriz que llamaremos **MATRIZ AMPLIADA**.

Los sistemas de ecuaciones los podemos clasificar, según sus posibles soluciones, en:

$$S.\ Ecuaciones \begin{cases} Compatibles \begin{cases} Determinados \\ Indeterminados \end{cases} \\ Incompatibles \end{cases}$$

Se dice que un sistema es **COMPATIBLE** cuando posee una o varias soluciones.

Se dice que un sistema compatible es **DETERMINADO** si posee una única solución.

Se dice que un sistema compatible es **INDETERMINADO** cuando tiene más de una solución.

Cuando un sistema no tiene ninguna solución se dice que es **INCOMPATIBLE**.

2.- Sistemas equivalentes.

Dos sistemas de ecuaciones se llaman **EQUIVALENTES** cuando cualquier solución del primero lo es también del segundo y viceversa.

Teorema fundamental de equivalencia en sistemas de ecuaciones lineales:

Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye la ecuación i-ésima por una combinación lineal de la ecuación i-ésima y de las restantes (siempre que el coeficiente por el que se multiplique la ecuación i-ésima sea distinto de cero) se obtiene otro sistema equivalente al primero.

Como corolario, si en un sistema de ecuaciones lineales la ecuación i-ésima es combinación lineal de las otras, podemos suprimirla y el sistema que así se obtiene es equivalente al primero.

3.- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

Dado un sistema de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{array}\right\}$$

se puede transformar a la forma matricial como $A.X = K$, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{pmatrix}$$

4.- Regla de Cramer.

Es un método de resolución de sistema de ecuaciones lineales.

Si un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es tal que el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, matriz regular, el sistema es compatible y determinado y cada una de sus incógnitas es igual al cociente de dos determinantes, siendo el numerador el resultado de sustituir en el determinante de la matriz de los coeficientes la columna de los coeficientes de la incógnita en cuestión por la columna de los términos independientes, y el denominador el determinante de la matriz de los coeficientes o matriz del sistema.

$$\text{Así pues: } A.X = K; \quad X = A^{-1}.K = \frac{1}{|A|}.Adj(A).K$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & k_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & k_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad i=1,\dots,n$$

5.- Método de Gauss.

El método de Gauss es una técnica de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, consiste en sustituir el sistema por otro equivalente, así tras sucesivas transformaciones se llega a un sistema escalonado.

En la práctica es uno de los métodos más usados. Las operaciones fundamentales efectuadas sobre el sistema son:

- Intercambio de ecuaciones.

- Multiplicación de una ecuación por un número.

- Adición a una ecuación de una combinación lineal de otras.

Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{array}\right\}$$

podemos transformarlo mediante las operaciones anteriores en un sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad . \quad . \; . + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a'_{22}x_2 + \quad . \quad . \; . + a'_{2n}x_n &= k'_2 \\ . \quad . \quad . \; . \; . \quad . \quad . &\quad . \\ a_{ss}^{(r)}x_s + \; . \; . + a_{sn}^{(r)}x_n &= k_s^{(r)} \\ 0\,.\,x_n &= k \end{array}\right\}$$

Ahora:

Si K $\neq$ 0, el sistema es incompatible.

Si k = 0, el sistema es compatible y entonces tenemos dos casos:

1) s = n, entonces la última ecuación quedará $a_{nn}^{(n)}x_n = k^{(n)}$; una vez resuelta esta ecuación, sustituimos el valor de x_n en la anterior y obtenemos x_{n-1}, y así sucesivamente hasta x_1. Así pues, el sistema es compatible y determinado.

2) s < n; entonces si pasamos al segundo miembro los términos correspondientes a las incógnitas x_{s+1}, ... , x_n obtenemos un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas x_1, ..., x_s vienen expresadas en función de las incógnitas x_{s+1}, ..., x_n , es decir, que tenemos un sistema compatible e indeterminado.

Una variante del método de Gauss es el método de Gauss-Jordan, que consiste en hacer ceros todos los coeficientes del sistema excepto los de la diagonal que se hacen 1.

6.- Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas como el adelantado en el epígrafe 1, (2), consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & k_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

Donde A es la matriz de los coeficientes y A^* es la matriz ampliada con la columna de los términos independientes.

<u>Teorema</u>: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible, es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz de los coeficientes ampliada con la columna de los términos independientes."

Luego:

Si rang(A) $\neq$ rang(A*), el sistema es incompatible.

Si rang(A) = rang(A*), el sistema es compatible:

Si rang(A) = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Si rango(A) < número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

7.- Sistemas homogéneos.

Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \; . \; . \; . \; + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \; . \; . \; . \; + a_{2n}x_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \; . \; . \; . \; + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

que es un sistema homogéneo. Si aplicamos el teorema de Rouché Frobenius:

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

podemos afirmar que los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos siempre son compatibles, lo que es cierto puesto que poseen siempre la solución trivial que es la (0,0,...,0).

Aplicando el teorema de Rouché podemos saber si el sistema tiene soluciones distintas de la trivial; así:

Si rango(A) = n = número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado y su solución es la trivial.

Si rango(A) $<$ n $=$ número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Por último, podemos afirmar que, para que un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas admita soluciones distintas de la trivial es necesario que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

- RESUMEN -

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde hemos ordenado las ecuaciones de tal modo que, queden en la misma columna todos los coeficientes de cada una de las incógnitas y los términos independientes en el segundo miembro; se calculan los rangos de la matriz de los coeficientes (A) y de la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes (A^*) y entonces:

Sea rango(A) $= r$ y rango(A^*) $= r'$:

Si $r \neq r' \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $r = r' \Rightarrow$ Sistema compatible:

$r = n \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
$r < n \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

■

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

ENUNCIADO:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de **m** *ecuaciones lineales con* **n** *incógnitas sea compatible, es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de dicha matriz ampliada con la columna de los términos independientes.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado el sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \,. \; a_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{array}\right\} \quad (*)$$

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

que son la matriz de los coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*) (que se obtiene al añadir la columna de los términos independientes a la matriz A) respectivamente.

Demostremos el teorema, para ello pongámoslo en lenguaje formal. Considerando las anteriores matrices, el enunciado formal del teorema podría ser:

El sistema (*) es compatible $\Leftrightarrow$ rango(A) = rango (A^*)

o lo que es lo mismo,

La condición necesaria y suficiente para que el sistema (*) sea compatible es que rango(A) = rango(A^*)

a) Demostremos la condición suficiente: **Si rango (A) = rango (A^*) $\Rightarrow$ el sistema (*) es compatible.**

Si rango(A) = rango(A^*) = h. Entonces existe al menos un menor de orden **h**, de la matriz A, distinto de cero: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ . & . & . & . \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$, luego las filas restantes $h+1$, $h+2$, ..., m son combinación lineal de las anteriores, y, por tanto, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1h}x_h + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2h}x_h + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hh}x_h + \dots + a_{hn}x_n = k_h \end{array}\right\}$$

que podemos escribir, pasando las incógnitas x_{h+1}, ..., x_n al segundo miembro como:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1h}x_h = k_1 - a_{1,h+1}x_{h+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2h}x_h = k_2 - a_{2,h+1}x_{h+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hh}x_h = k_h - a_{h,h+1}x_{h+1} - \dots - a_{hn}x_n \end{array}\right\}$$

siendo éste un sistema de **h** ecuaciones con **h** incógnitas (las del primer miembro) y tal que el determinante de la matriz de los coeficientes (que es el menor distinto de cero de orden h, antes mencionado) es distinto de cero, luego es un sistema de Cramer que siempre **es compatible (c.q.d.)**.

OBSERVACIÓN: Podemos ahora aplicar la regla de Cramer y obtener así la solución del sistema, solución en la que se calculan las **h** incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_h$ en función de las **n-h** restantes: el sistema será determinado si **h=n** e indeterminado si **h<n**. De esta forma se obtiene, con este teorema, la solución o soluciones de un sistema compatible.

b) Demostremos la condición necesaria: Si el sistema (*) es compatible ⇒ rango(A) = rango(A*)

Para ello, escribamos el sistema (*) en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{pmatrix}$$

Si este sistema tiene solución (**es compatible**) es que existen números $x_1, x_2, \dots, x_n$ que verifican la igualdad anterior, que nos expresa entonces que el vector

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, luego la última columna de A^* es combinación lineal de las anteriores y por tanto **rango(A) = rango(A*) (c.q.d.)**

———— 0 ————

OBSERVACIÓN FINAL: Como ya se habrá observado, este teorema nos permite detectar con qué tipo de sistema de ecuaciones lineales se corresponde un sistema dado, así:

$$\left\{\begin{array}{l} - \textit{Si rango}(A) = \textit{rango}(A^*) \Rightarrow \textit{Sistema compatible} \left\{\begin{array}{l} - \textit{Si } h=n \Rightarrow S.C.D. \\ - \textit{Si } h<n \Rightarrow S.C.I. \end{array}\right. \\ \\ - \textit{Si rango}(A) \neq \textit{rango}(A^*) \Rightarrow \textit{Sistema incompatible} \end{array}\right.$$

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.-

RESUMEN

(Pasos recomendables para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales)

I.- Se ordenan todas las ecuaciones de tal modo que queden en la misma columna todos los coeficientes de cada una de las incógnitas y los términos independientes en el segundo miembro.

II.- Se calculan los rangos de la matriz de los coeficientes (A) y de la matriz ampliada con los términos independientes (A^*).

Sea Rango(A)=r ; Rango(A^*)=r' ; m=nº de ecuaciones; n=nº de incógnitas.

Entonces:

Si $r \neq r'$ —> S.I.

Si $r = r'$ —> S.C.

Además si $r = r' < n$ —> S.C.I.

si $r = r' = n$ —> S.C.D.

III.- En los casos compatibles se calculan aquellas incógnitas cuyos coeficientes forman parte del menor que nos indicó que el rango era **r**; si hay varios menores de orden **r** distintos de cero, elegimos cualquiera de ellos; esta forma de proceder es válida también para seleccionar las ecuaciones a utilizar para resolver el sistema.

IV.- Una vez seleccionadas las incógnitas y las ecuaciones, se pasan al segundo miembro los términos en los que figuran las incógnitas restantes (si las hay) y se resuelve el sistema aplicando la regla de Cramer o los métodos de Gauss o Gauss-Jordan.