# CAPÍTULO 4

# ESPACIOS VECTORIALES



Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer la estructura de espacio vectorial.
- Conocer las propiedades fundamentales de los espacios vectoriales.
- Manejar los espacios vectoriales: $R^2$, $R^3$, $R^n$, polinomios, matrices de las mismas dimensiones, etc.
- Conocer el concepto de subespacio vectorial.
- Caracterizar los subespacios vectoriales.
- Determinar cuando un vector es combinación lineal de otros.
- Conocer el concepto de subespacio engendrado por un conjunto de vectores.
- Calcular la ecuación vectorial y paramétricas de una variedad lineal.

- Determinar cuando dos conjuntos de vectores son equivalentes.
- Calcular la intersección y suma de subespacios vectoriales.
- Conocer el concepto de subespacios suplementarios.
- Asimilar el concepto de dependencia e independencia lineal.
- Conocer el concepto de espacio vectorial de dimensión finita.
- Determinar cuando un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial de tipo finito.
- Determinar las coordenadas y componentes de un vector respecto de una base de su espacio vectorial.
- Conocer y calcular la dimensión de un espacio vectorial de tipo finito.
- Completar una base de un subespacio vectorial para formar una nueva del espacio general que contenga los vectores de la base del subespacio de partida.
- Calcular el rango de un conjunto de vectores.
- Relacionar las coordenadas de un vector respecto de distintas bases.
- Hallar la matriz de paso en un cambio de base.
- Conocer la relación entre las dimensiones de la suma de dos subespacios vectoriales, la dimensión de ellos y el subespacio intersección.

**BIBLIOGRAFÍA:**

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [GUT/GAR-90], [LOP/VER-92], [PIT-91], [VILL-94]

# E J E R C I C I O S

**1.-** Demostrar que el cuerpo de los números complejos tiene estructura de espacio vectorial sobre los números reales.

**2.-** En el conjunto $R^2$ se definen las siguientes operaciones:
Suma + : (x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')
Producto .: $\lambda$(x,y) = ($\lambda$x,.0)
Estudiar si la terna ($R^2$,+,.) es un espacio vectorial.

**3.-** Se considera el conjunto V={(x,y,y,-x) con x, y $\in$ R} en el que se definen las siguientes operaciones:
(x,y,y,-x) + (z,t,t,-z) = (x+z,y+t,y+t,-(x+z))
k(x,y,y,-x) = (kx,ky,ky,-kx) k $\in$ R.
Demostrar que V con estas operaciones es un espacio vectorial.

**4.-** Justificar si (V,+,.), siendo V = {$a+b\sqrt{7}$ , con a y b $\in$ Z} es o no un espacio vectorial sobre el cuerpo (Q,+,.). Las leyes de composición + y . son las usuales:

$$(a+b\sqrt{7}\,)+(a'+b'\sqrt{7}\,)=(a+a')+(b+b')\sqrt{7}$$

$$\lambda.(a+b\sqrt{7}\,)=\lambda a+\lambda b\sqrt{7}$$

**5.-** Probar que en un espacio vectorial (E,+,.) sobre un cuerpo conmutativo K(+,.), la propiedad conmutativa de la ley + de E es una propiedad que se deduce de las otras exigidas en la definición de esa estructura.

**6.-** a) El subconjunto H = {(x,0,0,...,0), x $\in$ K} de $K^n$, ¿es un subespacio vectorial de dicho espacio. vectorial?
b) Se considera el siguiente subconjunto de $R^n$, siendo R el cuerpo de los números reales: M = {($x_1$,$x_2$, .... ,$x_n$} tales que $x_1+x_2+..+x_n=0$}
¿ Es M subespacio vectorial del espacio vectorial $R^n$, sobre el cuerpo de los números reales?

**7.-** Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que F sea subespacio vectorial de E es que $\lambda\vec{x}$ + $\mu\vec{y}$ $\in$ F, $\forall$ $\lambda,\mu \in$ K y $\forall$ $\vec{x}$, $\vec{y}$ $\in$ F siendo K el cuerpo de escalares del espacio vectorial E.

**8.-** Se considera el subconjunto H, de $R^3$ , definido así:

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

¿ Es H subespacio vectorial de $R^3$ un espacio vectorial sobre R?

**9.-** Sea F el conjunto de las funciones definidas en el intervalo (0,1) para las que 2.f(0) = f(1). Probar que forman un espacio vectorial sobre R.

**10.-** Escribir el vector $\vec{v}$= (1,-2,5) como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$=(1,1,1), $\vec{u}_2$=(1,2,3) y $\vec{u}_3$=(2,-1,1).

**11.-** Escribir el vector $\vec{v}$ = (2,3,-5) como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$=(1,2,-3), $\vec{u}_2$=(2,-1,-4) y $\vec{u}_3$=(1,7,-5).

**12.-** Determinar a y b para que el vector (1,0,a,b) pertenezca al subespacio engendrado por (1,4,-5,2) y (1,2,3,-1).

**13.-** En el espacio vectorial $R^4$ se consideran los vectores (3,2,1,4) y (6,7,3,2). Hallar el subespacio vectorial que engendran y un subespacio vectorial suplementario.

**14.-** En el espacio vectorial anterior, sobre el cuerpo de los números reales, ¿es el vector $\vec{a}$(13,-41,35,-9) combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ (1,3,-5,2) y $\vec{c}$ (4,-4,0,1)?

**15.-** ¿ Qué valor ha de tomar "a" para que el vector (-2,-6,a) pertenezca a la variedad lineal engendrada por los vectores (1,3,-2) y (2,6,-1)?

**16.-** Demostrar que el vector $\vec{a}$(-18,-1,2,-2) es combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ (1,2,3,4), $\vec{c}$ (0,1,0,2) y $\vec{d}$ (5,2,1,4) y expresar $\vec{a}$ como combinación lineal de $\vec{b}$ , $\vec{c}$ y $\vec{d}$ , siendo $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ y $\vec{d}$ elementos (vectores) del espacio vectorial $R^4$ sobre R.

**17.-** Consideremos el espacio vectorial $R^3$ y los subconjuntos de dicho espacio:

H = { (3,0,2), (-1,0,1), (2,0,-5)} y J = { (7,0,0), (0,0,3) }

¿ Son H y J equivalentes?

**18.-** Consideremos el espacio vectorial $R^2$ y sean F={(3,5)} y G={(-6,-10)}. ¿ Son F y G equivalentes ?

**19.-** En el espacio vectorial $R^4$ se considera el subconjunto
$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
a) Demostrar que M es un subespacio vectorial de $R^4$.
b) Encontrar en M tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ que sean linealmente independientes, y demostrar que todo vector de M se puede poner como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

**20.-** Consideremos el espacio vectorial $R^3$ sobre el cuerpo de los números reales, una de cuyas bases es B={$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ }.Sea E el espacio engendrado por los vectores $\vec{a} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$ , $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ y $\vec{c} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$ y sea F el

subespacio engendrado por los vectores:
$\vec{d}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$, $\vec{e}=2\vec{u}_1+3\vec{u}_2+4\vec{u}_3$ y $\vec{f}=3\vec{u}_1+4\vec{u}_2+5\vec{u}_3$
Hallar:
a) Una base de E.
b) Una base de F.
c) E intersección F, su dimensión y una base.

**21.-** Consideremos el espacio vectorial V=RxRxR sobre el cuerpo de los números reales, una de cuyas bases es B={$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$}. Sea F={$\vec{a}, \vec{b}$} el subconjunto de V tal que $\vec{a}=2\vec{x}_1+\vec{x}_2-\vec{x}_3$, $\vec{b}=\vec{x}_1+\vec{x}_2+3\vec{x}_3$. Hallar:
a) Las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal C(F).
b) Las ecuaciones cartesianas o implícitas de C(F).

**22.-** Demostrar que C($\vec{a}, \vec{b}$)=C($\vec{c}, \vec{d}$) siendo $\vec{a}$(1,2,-1), $\vec{b}$(2,-1,0), $\vec{c}$(-4,7,-2), $\vec{d}$(-1,-7,3) elementos del espacio vectorial $R^3$ sobre el cuerpo de los números reales.

**23.-** Se considera el subconjunto de $R^n$ constituido por aquellos vectores para los que la suma de sus n componentes es nula. Probar que es subespacio vectorial y determinar un sistema de generadores.

**24**.- Encontrar una base para el espacio de $R^4$ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$x_1 = \alpha + \beta + \Gamma$
$x_2 = \alpha - \beta + 3\Gamma$
$x_3 = \alpha + 2\beta$
$x_3 \;\; 2\alpha + 3\beta + \Gamma$

**25.-** Determinar una base para la suma y la intersección de los subespacios $V_1$ y $V_2$ engendrados por {(1,2,1,0), (-1,1,1,1)} y {(2,-1,0,1), (1,-1,3,7), respectivamente.

**26.-** Se considera el subespacio V de $R^5$ engendrado por los vectores (1,2,-1,1,0), (1,3,0,-1,1) y (0,1,1,-2,1). Obtener un espacio suplementario.

**27.-** En el espacio vectorial $R^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$V_1$ = { (x,y,z) tales x + y + z = 0 }
$V_2$ = { (t,2t,3t) tales que t ε R}

Demostrar que $R^3$ es suma directa de ellos.

**28.-** En el R-espacio vectorial $R^2$, analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:
a) { (0,1), (0,2) }
b) { (1,1), (2,2), (-1,1) }
c) { (1,1), (0,2), (3,1) }
d) { (0,1), (-1,1) }

**29.-** Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de $R^3$:

$\vec{u}_1 = (1,-2,-1)$
$\vec{u}_2 = (3,-2,1)$

$\vec{u}_3 = (1,-3,-2)$

**30.-** Comprobar que los vectores $\vec{u}_1=(1,0,-2,5)$, $\vec{u}_2=(2,1,-1,4)$ y $\vec{u}_3=(-1,2,0,2)$ de $Q^4$ son linealmente independientes.

**31.-** Sabiendo que los vectores $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ y $\vec{x}_4$ son linealmente independientes, estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores:

$$\vec{z}_1 = \vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3$$
$$\vec{z}_2 = \vec{x}_2+\vec{x}_3+\vec{x}_4$$
$$\vec{z}_3 = \vec{x}_3+\vec{x}_4+\vec{x}_1$$
$$\vec{z}_4 = \vec{x}_4+\vec{x}_1+\vec{x}_2$$

**32.-** Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores del espacio vectorial $R^2$ sobre el cuerpo de los números reales:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2 \text{ y } \vec{b} = b_1\vec{u}_1+b_2\vec{u}_2$$

expresados respecto de la base $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$ sean linealmente dependientes es:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

**33.-** Si los vectores $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, ..., $\vec{x}_n$ del espacio vectorial E sobre el cuerpo R son linealmente independientes, demostrar que también lo son los vectores:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1$$
$$\vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$
$$\dots$$
$$\vec{y}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \dots + \vec{x}_n$$

**34.-** Determinar una base del subespacio V engendrado por:

$$\{ (1,2,3,1), (2,3,2,3), (0,1,4,-1), (2,-3,1,1), (4,1,7,3) \}$$

**35.-** En el espacio vectorial $R^3$ sobre el cuerpo de los números reales, se consideran los vectores $\vec{a}$ (1,0,1), $\vec{b}$ (2,-1,3) y $\vec{c}$ (1,6,2) referidos a la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

a) Demostrar que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

b) Demostrar que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ constituyen un sistema de generadores de $R^3$.

c) Hallar la expresión del vector (11,8,4) respecto de la base $B'=\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

**36.-** Consideremos el espacio vectorial $R^3$ sobre el cuerpo de los números reales y la base $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Sean los vectores:

$\vec{a} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{b} = -\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 5\vec{x}_3$ y $\vec{c} = 6\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$.

Demostrar que $B'=\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es otra base de $R^3$ y hallar las ecuaciones del cambio de base entre B y B'.

**37.-** En el espacio vectorial real $R^3$ consideramos las dos bases siguientes:

$B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tales que: $\vec{u}_1=-\vec{v}_2+\vec{v}_3$ $\vec{u}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ y $\vec{u}_3=\vec{v}_2$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de base entre B y B'.

b) ¿Cuál es la expresión del vector $\vec{a} = -\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$ respecto de la base B?

c) Si el vector B tiene de coordenadas los números (7,4,9) respecto de la base B, ¿qué coordenadas tiene dicho vector respecto de la base B'?

**38.-**Se considera el espacio vectorial $R^4$ y se pide hallar:
a) Una base que contenga al vector (1,2,1,1).
b) Una base que contenga a los vectores (1,1,0,2) y (1,-1,2,0).

**39.-** En el espacio vectorial real $R^3$ se considera el sistema S={(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)} referido a la base canónica. Estudiar en función de "a" la dimensión del subespacio engendrado por S, C(S).

**40.-** En el espacio vectorial real $R^4$ se consideran los vectores $\vec{a}$(1,0,0,1), $\vec{b}$ (0,0,0,3), $\vec{c}$ (2,-1,4,3) y $\vec{d}$ (2,1,7,0) referidos a la base canónica B={$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$}. Demostrar que dichos vectores constituyen una base de $R^4$ y determinar las coordenadas de $\vec{e}$ (-7,-8,-45,2) respecto de la base {$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$}.

**41.-** Se considera el espacio vectorial real de los polinomios con coeficientes reales, en una indeterminada, de grado menor o igual a dos.
Expresar el polinomio $-x^2-x+18$ como combinación lineal de los polinomios $x-1$, $x+2x^2$ y $3-x^2$.

**42.-** Consideremos el espacio $R^4$ y el subespacio vectorial del mismo engendrado por los vectores $\vec{a}$(-1,2,1,3) y $\vec{b}$ (2,-4,-3,2). Se pregunta si el vector $\vec{c}$ (6,-12,-10,14) pertenece a dicho subespacio.

**43.-** Demostrar que el conjunto C = {(x,y,y,-x) / x,y∈R} con una operación suma definida así: (x,y,y,-x) + (w,z,z,-w) = [x+w,y+z,y+z,-(x+w)] y el producto por un escalar k∈R definido por: k(x,y,y,-x) = (kx,ky,ky,-kx) constituye un espacio vectorial de dos dimensiones.

**44.-** Sea el espacio vectorial $E_3$ definido sobre R. Consideremos un vector V cuyas componentes en una cierta base {$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$} son (3,2,1). Deseamos completar una nueva base añadiendo a los vectores $\vec{w}_1 = \vec{u}_1-\vec{u}_2$; $\vec{w}_2 = \vec{u}_2+\vec{u}_3$ un tercer vector $\vec{w}_3$ con la condición de que en esa nueva base el vector $\vec{V}$ tenga las componentes (1,1,1).

**45.-** En el espacio $E_4$ definido sobre el cuerpo de los racionales, encontrar, si es posible, una base que contenga a los vectores $\vec{v}$ (4,-3,0,0) y $\vec{w}$(0,1,0,1).

**46.-** Sea la Base $B_1$ del espacio $E_4$, formada por los vectores $\vec{u}_1$(1,0,0,-1); $\vec{u}_2$(0,1,-1,0); $\vec{u}_3$(0,1,0,-1); $\vec{u}_4$(0,1,1,1). Obtener las componentes en dicha base, del vector $\vec{v}$ (-3,2,1,-2) que está expresado en otra base $B_2$ formada por los vectores:
$\vec{v}_1$(1,2,0,0); $\vec{v}_2$(-1,0,1,1); $\vec{v}_3$(0,0,-2,1); $\vec{v}_4$(-1,0,-1,0)

**47.-** En el espacio vectorial $R^4$ se consideran los subespacios $E_1$ y $E_2$ engendrados por los vectores:

$E_1$: (1,1,1,1) y (1,-1,1,-1)
$E_2$: (1,2,0,2) , (1,2,1,2) y (3,1,3,1)

Hallar las dimensiones del subespacio intersección y suma.

**48.-** Determinar una base del subespacio V engendrado por:
(1,2,3,1); (2,3,2,3); (0,1,4,-1); (2,-3,1,1); (4,1,7,3)

**49.-** Dado el espacio vectorial $R^4$ consideremos los subespacios:

$$V_1 = C(1,2,0,1)$$

$$V_2 = \{ (x,y,z,t) \,/\, x - y + z + t = 0,\ y - z = 0 \}$$

¿Pertenece el vector $\vec{v}$ (2,4,0,2) a $V_1$, $V_2$ ó $V_3$ ? En caso afirmativo, calcular sus coordenadas en unas bases elegidas previamente.

**50.-** Encontrar una base para el subespacio $R^4$ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$V_3 = \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda + \alpha + \beta \\ x_2 &= \lambda - \alpha + 3\beta \\ x_3 &= \lambda + 2\alpha \\ x_4 &= 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{aligned}$$