4.2.- Propiedades de los espacios vectoriales.

Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se verifican las siguientes propiedades:

1. $0.\vec{a} = \vec{0}$, $0 \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$, $\vec{0} \in E$
2. $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$, $\vec{0} \in E$, $\forall\, \lambda \in K$
3. *Si* $\lambda.\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ó* $\vec{a} = \vec{0}$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$, $\vec{0} \in E$
4. $\lambda(-\vec{a}) = -(\lambda.\vec{a})$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$
5. $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a})$, $\forall \lambda \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$
6. $\lambda(\vec{a}-\vec{b}) = \lambda\vec{a}-\lambda\vec{b}$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, \vec{a}$, $\vec{b} \in E$
7. $(\lambda-\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}-\mu\vec{a}$, $\forall\, \lambda$, $\mu \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$
8. *Si* $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ *y* $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$, $\forall\, \lambda$, $\mu \in K$, $\forall\, \vec{a} \in E$
9. *Si* $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$ *y* $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, \vec{a}$, $\vec{b} \in E$

ESPACIOS VECTORIALES

RESUMEN TEÓRICO

1.- Concepto y definición de espacio vectorial.-

Diremos que un conjunto E tiene estructura de **ESPACIO VECTORIAL** (e.v.) **SOBRE UN CUERPO K** cuando verifica las siguientes condiciones:

1) En E hay definida una **LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA** para la cual tiene estructura de **GRUPO ABELIANO**.

NOTA: En lo que sigue a esta ley la llamaremos suma (+), y a su elemento neutro lo representaremos por $\vec{0}$).

2) Existe sobre E una **LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA** cuyo dominio de operadores es el cuerpo K (KxE ————> E) que verifica las siguientes propiedades $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$:

a) Distributiva respecto a la suma de escalares:

$$(\lambda+\mu) . \vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$$

b) Distributiva respecto a la suma de vectores:

$$\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$$

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío, F, de un espacio vectorial E sobre un cuerpo K, sea subespacio vectorial de E es que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$1.-\ \forall\ \vec{a},\ \vec{b} \in F,\quad \vec{a} - \vec{b} \in F$$

$$2.-\ \forall\ \lambda \in K,\ \forall\ \vec{a} \in F,\quad \lambda\vec{a} \in F$$

ó también la siguiente que sustituye a las dos anteriores:

$$\forall\ \vec{a},\ \vec{b} \in F,\quad \forall\ \lambda,\ \mu \in K,\quad \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in F$$

4.- Combinación lineal.

Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, diremos que el vector $\vec{x} \in E$, es **COMBINACIÓN LINEAL** de los vectores de E, $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ cuando existan los escalares de K, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ que verifican:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ \ldots\ + \lambda_n\vec{x}_n$$

Si $\vec{x} \in E$ es combinación lineal de $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n \in E$, y cada $\vec{x}_i$ es combinación lineal de los vectores $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \ldots,\ \vec{y}_h \in E$, es decir, $\vec{x}_i = a_{i1}\vec{y}_1 + a_{i2}\vec{y}_2 + \ \ldots\ + a_{ih}\vec{y}_h$ entonces $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{y}_i,\ i = 1,2,\ldots,h$.

5.- Subespacio engendrado por un conjunto de vectores.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, si consideramos un subconjunto F, de E, tal que $F = \{\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n\ \}$ entonces se verifica que el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de elementos de F es subespacio vectorial de E, llamado **SUBESPACIO ENGENDRADO POR F** y que representaremos por **C(F)**. A F se le llama **CONJUNTO DE GENERADORES DEL SUBESPACIO C(F)**. A **C(F)** también se le llama **VARIEDAD LINEAL ENGENDRADA POR F.**

Sea C(F) el subespacio engendrado por F, a la igualdad:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+ \ldots +\lambda_n \vec{x}_n \ , \ \lambda_i \in K, \quad \vec{x} \in C(F) \ , \ \vec{x}_i \in F$$

se la conoce como **ECUACIÓN VECTORIAL DE C(F).**

Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, diremos que los conjuntos:

$$F = \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_h \} \quad \text{y} \quad G = \{ \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s \}$$

con F,G $\subset$ E son **EQUIVALENTES** si los subespacios C(F) y C(G) son iguales.

6.- Intersección y suma de subespacios vectoriales.

Dado un espacio vectorial E, sobre un cuerpo K, y dos subespacios suyos F y G, el conjunto **F $\cap$ G** es también un subespacio vectorial de E. En general si $\{ F_i / i = 1, 2, \ldots, t \}$ es una familia de subespacios de E, su intersección $\bigcap_{i=1\ldots t} F_i$ es también subespacio vectorial de E.

Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y F y G son subespacios vectoriales de E, llamamos **SUMA** de F y G y lo representamos como **F + G** al conjunto:

$$F + G = \{ \vec{x} = \vec{u}+\vec{v} \ / \ \vec{u} \in F, \ \vec{v} \in G \}$$

Además, se demuestra que F + G es subespacio vectorial de E.

Diremos que la suma F + G es **DIRECTA**, y lo representaremos por **F $\oplus$ G** si:

$$\forall \ \vec{x} \in F+G, \ \exists \ \vec{u} \in F \ \ y \ \ \vec{v} \in G, \ \text{únicos} \ / \ \vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$$

se dice, entonces, que F y G son **SUBESPACIOS INDEPENDIENTES**.

Se verifican las siguientes proposiciones:

1.- F+G es el subespacio engendrado por F U G.

2.- F+G es suma directa $\Leftrightarrow$ $F \cap G = \{ \vec{0} \}$.

3.- F+G es suma directa $\Leftrightarrow$ $si \ \vec{u} \in F \ \ y \ \ \vec{v} \in G \ \ y \ \ \vec{u}+\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

4.- $F \cap G = \{ \vec{0} \} \Leftrightarrow si \ \vec{u} \in F \ \ y \ \ \vec{v} \in G, \ \vec{u}+\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

7.- Subespacios suplementarios.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, sean F y G subespacios vectoriales de E, diremos que F y G son **SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS** si se verifican las dos condiciones siguientes:

$$1)\ F \cap G = \{ \vec{0} \}$$

$$2)\ F + G = E$$

Aunque a priori parezca raro, si F y G son subespacios suplementarios, F no es el único subespacio suplementario de G y, G no es el único subespacio suplementario de F (Ver ejercicio 6).

Podemos concluir con la siguiente definición: "Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y F y G son subespacios vectoriales de E, diremos que F y G son suplementarios si se verifica que:

$$\forall\, \vec{x} \in E,\ \exists|\, \vec{x}_1 \in F \ \ y \ \ \exists|\, \vec{x}_2 \in G \ / \ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

8.- Dependencia e independencia lineal de vectores.

Sea E un K-espacio vectorial, diremos que los vectores de E, $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son **LINEALMENTE DEPENDIENTES** (l.d.) cuando existen elementos de K, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ **NO TODOS NULOS** que verifican:

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ \ldots \ + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Se dice también que los vectores $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ forman un **SISTEMA LIGADO** de vectores.

Sea E un K-espacio vectorial, diremos que los vectores de E, $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES** (l.i.) cuando no son linealmente dependientes, ó cuando:

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ \ldots \ + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Se dice también que los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ forman un **SISTEMA LIBRE** de vectores.

En la práctica se puede determinar si un conjunto de vectores es libre o ligado calculando el rango de la matriz formada por ellos, si es menor que el número de vectores el sistema es ligado; si es igual, el sistema es libre.

Cuando el vector $\vec{x} \in E$, es **COMBINACIÓN LINEAL** de los vectores de E, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ se dice que $\vec{x} \in E$ depende linealmente de dichos vectores y ello ocurre cuando existan los escalares de K, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que verifican:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+ \ldots +\lambda_n\vec{x}_n$$

Se verifican las siguientes proposiciones:

1) El $\vec{0}$ es combinación lineal de un conjunto cualquiera de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, puesto que existen $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ que verifican que

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+ \ldots +\lambda_n\vec{x}_n \cdot$$

2) Todo vector de un conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es combinación lineal de todos ellos, puesto que por ejemplo:

$$\vec{x}_i = 0\vec{x}_1+0\vec{x}_2+ \ldots +1\vec{x}_i+\ldots +0\vec{x}_n \cdot$$

3) La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de vectores de un K espacio vectorial sean linealmente dependientes es que uno de ellos sea combinación lineal de los restantes.

4) Todo conjunto de vectores de un K espacio vectorial que contenga al $\vec{0}$ es ligado.

9.- Espacios vectoriales de dimensión finita.

Existen espacios vectoriales cuyos elementos, todos, dependen linealmente de conjuntos de vectores que también pertenecen a dichos espacios. Estos conjuntos de vectores que "generan" el espacio tienen un **NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS** y de aquí que a estos espacios se les llame **ESPACIOS VECTORIALES DE TIPO FINITO.**

Si E es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y se verifica que existe un subconjunto finito, F de E, tal que todo elemento de E es combinación lineal de los elementos de F, diremos que F es un conjunto o **SISTEMA DE GENERADORES DE E** y que E es un **ESPACIO VECTORIAL DE TIPO FINITO.**

También se dice que $F = \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \}$ **ENGENDRA** o genera el espacio vectorial E, de **TIPO FINITO**, si se verifican las siguientes condiciones:

1.- $F \subset E$

2.- *F es un conjunto finito de vectores*

3.- $\forall \vec{x} \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \,/\, \vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n$

A F se le llama **SISTEMA DE GENERADORES DE E.**

10.- Base de un espacio vectorial de tipo finito.-

Un subconjunto finito F de un espacio vectorial E sobre un cuerpo K, forma una **BASE DE E** si se verifican las dos condiciones siguientes:

1.- F es sistema de generadores de E.
2.- F es un sistema de vectores linealmente independientes.

La expresión de un vector respecto de una base de su espacio vectorial es única.

Sea la base $B = \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \}$ de un espacio vectorial finito E, los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que $\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n$ se les llaman **COORDENADAS** del vector respecto de la base B. A los vectores: $\overline{\lambda_1 x_1}, \overline{\lambda_2 x_2}, \ldots, \overline{\lambda_n x_n}$ tales que $\overline{x} = \overline{\lambda_1 x_1} + \overline{\lambda_2 x_2} + \ldots + \overline{\lambda_n x_n}$ se les llaman **COMPONENTES** del vector respecto de la base B.

Se verifican las siguientes proposiciones:

1.- Todo espacio vectorial E sobre un cuerpo K, de tipo finito, y tal que $E \neq \{ \vec{0} \}$ tiene una base.

2.- Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, engendrado por un sistema de n vectores, entonces todo sistema libre de s vectores de E es tal que $s \leq n$.

3.- En todo espacio vectorial de dimensión finita, todas sus bases tienen el mismo número de vectores.

11.- Dimensión de un espacio vectorial finito.

Sea E un espacio vectorial de tipo finito, se llama **DIMENSIÓN** de E al número común de elementos de cualquiera de sus bases.

Se verifican las siguientes proposiciones:

1.- Si E es un espacio vectorial de dimensión n, sobre un cuerpo K, todo conjunto de más de n vectores de E es ligado, o lo que es lo mismo: " En un espacio vectorial de dimensión n, el máximo número de vectores linealmente independientes es n".

2.- Si E es un espacio vectorial de dimensión n, sobre un cuerpo K, todo sistema libre de n vectores es una base de E.

3.- Si E es un espacio vectorial de tipo finito de dimensión n, sobre un cuerpo K, y $\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_s \}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, siendo $s \leq n$, siempre se pueden encontrar (n-s) vectores de E, $\{ \vec{x}_{s+1}, \vec{x}_{s+2}, \ldots, \vec{x}_n \}$ tales que el conjunto $\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \}$ sea una base de E.

4.- Como corolario de la anterior proposición, si F es un subespacio vectorial de un espacio vectorial E de tipo finito y de dimensión n, sobre un cuerpo K, entonces se verifica que si $\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_f \}$ es una base de F, se puede encontrar una base de E que contenga a los vectores $\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_f \}$.

12.- Rango de un conjunto de vectores.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $H = \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_h \}$ un subconjunto de vectores de E.

Diremos que el **RANGO** de H es **r** si r es el mayor número de vectores linealmente independientes de H ($r \leq h$).

Es evidente que el rango de un conjunto de vectores es igual a la dimensión del subespacio vectorial que engendran dichos vectores, y que si E es un espacio vectorial de dimensión n, un conjunto de vectores será base de E si su rango es n.

13.- Cambio de base en un espacio vectorial.

Sean $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \}$ y $B' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \}$ dos bases de E y $\vec{x} \in E$ de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ respecto de B e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$ respecto de B' y sean:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 = a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{u}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{v}_n = a_{n1}\vec{u}_1 + a_{n2}\vec{u}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{u}_n \end{array}\right\}$$

las expresiones de los elementos de la base B' como combinación lineal de los elementos de la base B. Podemos relacionar las coordenadas del vector $\vec{x}$ en B con las coordenadas de dicho vector en B' por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{array}\right\}$$

Que en forma matricial seria:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{B'\to B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}_{B'}$$

14.- Base canónica de K^n .

Para cualquiera que sea el cuerpo K, y $\forall n \in N^*$, el conjunto K^n puede ser dotado de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K mediante las operaciones suma y producto por un escalar definidas por:

$$(+) : (k_1, k_2, \dots, k_n) + (h_1, h_2, \dots, h_n) = (k_1+h_1, k_2+h_2, \dots, k_n+h_n)$$

$$(.) : \lambda.(k_1, k_2, \dots, k_n) = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$$

Este espacio vectorial K^n tiene dimensión n y los vectores:

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$$

$$\vec{e}_2 = (0,1,\dots,0)$$

$$\dots$$

$$\vec{e}_n = (0,0,\dots,1)$$

constituyen una base de K^n que llamaremos **BASE CANÓNICA DE K^n**.

15.- Subespacios vectoriales de tipo finito.

Si F y G son subespacios vectoriales suplementarios de un espacio vectorial de tipo finito y de dimensión n sobre un cuerpo K, se verifica que:

$$\mathbf{dim\ (E) = dim(F) + dim(G)}$$

Se verifica la siguiente proposición:

Sea E un espacio vectorial de tipo finito y de dimensión n sobre un cuerpo K. Si F y G son subespacios vectoriales de E, se verifica:

$$\mathbf{dim(F) + dim(G) = dim(F+G) + dim(F \cap G)}$$

En el caso particular de que la suma sea directa:

$$\mathbf{dim(F) + dim(G) = dim(F \oplus G)}$$

y para obtener una base de F+G (si + es directa) basta hallar la unión de una base de F y de una de G.

■