CAPÍTULO 5

APLICACIONES LINEALES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Comprender el concepto de aplicación lineal.
- Clasificar cualquier aplicación lineal.
- Calcular la imagen de una aplicación lineal, una base y su dimensión.
- Calcular el núcleo de una aplicación lineal, una base y su dimensión.
- Operar con aplicaciones lineales.
- Determinar las ecuaciones de una aplicación lineal cuando se cambian las bases inicialmente usadas en su definición.
- Calcular la matriz asociada a una aplicación lineal tras cambiar de base.
- Conocer la relación $A_{B'C'}=Q^{-1}_{C'C}\ A_{BC}\ P_{B'B}$, notando que $A_{B'C'}$ y A_{BC} son matrices equivalentes.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [GUT/GAR-90], [LOP/VER-92], [PIT-91], [VILL-94]

E J E R C I C I O S

1.- ¿ Es $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,x_2,x_2+x_3)$ una aplicación lineal de R^3 en R^3 ?

2.- Razonar cuáles de las siguientes aplicaciones entre los R-espacios vectoriales considerados, son lineales y estudiar para las que lo sean su inyectividad o suprayectividad.

1) f: R^2 ——> R^3 $\quad f(x,y) = (x+y,0,2y)$
2) f: R^3 ——> R^3 $\quad f(x,y,z) = (xz,-y,-2z)$
3) f: R^3 ——> R $\quad f(x,y,z) = xyz$

3.- Sea $R_3[x]$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que tres. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales. Para las que lo sean analizar su inyectividad o sobreyectividad.

a) f: $R_3[x]$ —> $R_3[x]$, $f(P(x)) = P'(x)$ donde $P'(x)$ designa el polinomio derivada de $P(x)$
b) g: $R_3[x]$ —> $R_3[x]$, $g(P(x)) = P(x) + xP'(x)$
c) h: $R_3[x]$ —> $R_3[x]$, $h(P(x)) = x^2P''(x) + 3P'(x) - P(x)$

4.- ¿ Existe una aplicación lineal f: R^3 ——> R^2 tal que f(1,0,0) = (1,1), f(1,1,0) = (1,0), f(1,1,1) = (1,-1) y f(-1,0,1) = (-1,-2) ? ¿ Es única ?

5.- Sean V, W dos C-espacios vectoriales. Sea f un homomorfismo de V en W considerados como R-espacios vectoriales. Probar que f pertenece a los homomorfismos de V en W, considerados como C-espacios vectoriales si y solo si, f(iz) = if(z) para todo z de V.

6.- Sea M_3 el R-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 3 con elementos en R. Sea A una matriz de M_3. Demostrar que las siguientes aplicaciones son endomorfismos de M_3:

f: M_3 —> M_3 , f(X) = AX
g: M_3 —> M_3 , g(X) = XA

7.- Sea M_2 el espacio vectorial sobre R de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos en R, consideremos las siguientes aplicaciones:

$$f : M_2 \geq M_2, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$g : M_2 \geq M_2, g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kd \end{pmatrix}$$

Demostrar que son endomorfismos. ¿Son automorfismos?

8.- Sea E un espacio vectorial y $f \in$ End (E), tal que $f^2 - 3f + id_E = 0$ (endomorfismo nulo). Probar que f es un automorfismo.

9.- Sea V un k-espacio vectorial de dimensión 2 y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V. Sean f,g $\in$ End (V) tales que:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \\ g(\vec{u}_2) = -\vec{u}_1 \end{cases}$$

Demostrar que f°g $\neq$ g°f

10.- Clasificar las aplicaciones lineales siguientes:

a) f: R —> R, f(x) = 2x

b) g: R^3 —> R^3, g(x,y,z) = (x,y,0)

11.- Clasificar la aplicación lineal

f: R^4 —> R^2, f(x,y,z,t) = (t-x,y-z)

12.- Clasificar la aplicación lineal f: R^3 —> R^3 en la que:

$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$

$f(\vec{u}_3) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Siendo las respectivas bases B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y B' = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

13.- Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal f definida entre los espacios vectoriales V_2, una de cuyas bases es B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y V_3, una de cuyas bases es B' = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, siendo:

$f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2) = x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2 + x_3'\vec{v}_3$

$f(\vec{u}_1) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$; $f(\vec{u}_2) = 5\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$

14.- Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal f definida entre los espacios vectoriales V, una de cuyas bases es B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y V', una de cuyas bases es B' = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, siendo:

$f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2) = x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2$

$f(\vec{u}_1) = 5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$; $f(\vec{u}_2) = -4\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2$

15.- Hallar im(f) y N(f), siendo f la aplicación lineal definida en el ejercicio anterior.

16.- Determinar una aplicación lineal f: R^4 —> R^3 tal que Ker f esté engendrado por (-1,0,0,1) y (1,3,2,0) e Im f engendrada por (1,1,1) y (0,-2,1).

17.- Hallar una aplicación f: R^3 —> R^3 tal que:

1.- f es lineal

2.- f(1,0,0) es proporcional a (0,0,1)

3.- f^2 = f

4.- Ker f = { (x,y,z) $\in$ R^3 / x+z = 0 }

¿ Es f única ?

18.- Determinar una aplicación lineal f: R^4 —> R^3 cuya imagen esté engendrada por

(2,0,1) y (-1,3,1).

19.- Consideremos la aplicación f: $R^3 \longrightarrow R^3$ tal que: f(x,y,z) = (2x+y,-z,0)
Se pide: a) Determinar Ker f y hallar una base de él.
b) Hallar el rango de f
c) ¿ Pertenece (6,-2,0) a Ker f ?

20.- Sea V un K-espacio vectorial de dimensión 4, y sea B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ una base suya y f el endomorfismo de V definido por:
$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 + \vec{u}_4$, $f(\vec{u}_4) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Hallar su núcleo y su imagen. ¿ Es f un automorfismo ?

21.- Sea f: $R_3[x] \longrightarrow R_3[x]$ la aplicación lineal f(P(x)) = P'(x):
a) Hallar $f^{-1}(3x^2-1)$
b) Determinar Ker f e Im f.
c) Obtener (Ker f) $\cap$ (Im f)

22.- Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y f $\in$ End(E). Demostrar que Kerf = Im f si y solo si dim E = 2 dim(Im f) y $f^2 = 0$.

22'.- Sean V, W dos R-espacios vectoriales con dim V = 3 y dim W = 4; sea B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y B' = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ bases de V y W respectivamente. Sea f $\in$ Hom(V,W), determinado por:

$f(\vec{v}_1) = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3 + \vec{w}_4$
$f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 - 2\vec{w}_3 + \vec{w}_4$
$f(\vec{v}_3) = 4\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + 3\vec{w}_4$

Obtener:
a) Ecuaciones del homomorfismo, b) Determinar Ker f, c) Determinar Im f.

23.- Sean V y W dos R-espacios vectoriales y B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}$,
B' = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ bases respectivas de V y W. Sea f $\in$ Hom (V,W) definidos por:

$f(\vec{u}_1) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + 2\vec{w}_3$
$f(\vec{u}_2) = 2\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 + 4\vec{w}_3$
$f(\vec{u}_3) = -\vec{w}_2 + \vec{w}_3$
$f(\vec{u}_4) = 2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 3\vec{w}_3$
$f(\vec{u}_5) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 + 4\vec{w}_3$.

Se pide:
a) Hallar las ecuaciones de f.
b) Determinar ker f.
c) Determinar Im f.

24.- Sean f: $R^3 \longrightarrow R^4$, g: $R^3 \longrightarrow R^4$ definidas por f(x,y,z) = (x,-y,z,x+y+z) y g(x,y,z) = (-x,y,2z,-x-y+z). Se pide:
a) Hallar la expresión matricial del homomorfismo f+g respecto de las bases canónicas.
b) Idem para 3f - 2g.
c) Determinar Ker f y Ker g. ¿ Es Ker f + Ker g = Ker (f+g) ?

25.- Sea f $\in$ End (R^4) tal que $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$, $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_3) = 3\vec{u}_1$

$f(\vec{u}_4) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + 2\vec{u}_4$, siendo $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ una base de R^4. Hallar una base de Im f y completarla para obtener una base de R^4.

26.- Sea V un R-espacio vectorial de dimensión 3. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V. Consideremos los endomorfismos f de V tales que:
a) Unas ecuaciones de Ker f respecto de B son:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

b) Unas ecuaciones de Im f respecto de B son:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 \quad = 0 \end{array}\right\}$$

Se pide:

1.- Ecuaciones de f respecto de B.
2.- Determinar f^2.

27.- Sea f: $R^3 \longrightarrow R^3$ un endomorfismo de R^3 determinado por f(x,y,z) = (-x+y+2z,-z,3y).
a) Hallar las ecuaciones de f respecto de la base B = {(-1,0,0), (0,2,1), (0,0,-2)} y obtener las coordenadas respecto de B de f(-3,-1,1).
b) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases C = {(1,1,1), (0,0,3), (0,2,-1)} y C' = {(1,-1,1), (2,1,3), (3,0,3)}.

28.- Sea f: $R^3 \longrightarrow R^4$ un homomorfismo tal que f(1,0,0) = (1,1,0,1), f(0,1,0) = (-1,2,0,0) y f(0,0,1) = (0,3,0,1). Hallar la matriz asociada a f respecto al par de bases B= { (1,2,1), (0,1,2), (0,0,1)} y B' = {(2,1,0,1), (0,2,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,3)}.

29.- Consideremos los vectores de R^3 siguientes:

$\vec{a}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (2,3,1)$, $\vec{a}_3 = (3,-1,1)$
$\vec{b}_1 = (2,1,0)$, $\vec{b}_2 = (1,18,7)$, $\vec{b}_3 = (-4,8,4)$

Sea f el endomorfismo de R^3 tal que $f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$, $f(\vec{a}_2) = \vec{b}_2$, $f(\vec{a}_3) = \vec{b}_3$. Hallar:
a) Las ecuaciones de f.
b) Las ecuaciones de los subespacios ker f e Im f, así como una base de cada uno de ellos.

30.- Sea f: $R^3 \longrightarrow R^3$ la aplicación lineal definida por

f(x,y,z) = (x+2y+3z,-x+y,x+y+2z).

Se pide:

a) Hallar una base y la dimensión de Ker f.
b) Hallar una base y la dimensión de Im f.
c) Analizar si (8,1,5) pertenece a Im f.
d) ¿ Pertenece (3,0,1) a Ker f ?

31.- Sea f: $R^2 \longrightarrow R^2$ definida por f(x,y) = (3x,-y). Se pide:
a) Obtener la matriz asociada al homomorfismo f respecto a las bases canónicas.
b) Obtener la matriz asociada a f respecto a las bases B= {(1,1), (1,-1)} y B' = {(1,0), (2,2)}
c) ¿ Es f un automorfismo ?

32.- Sea f: $R^3 \longrightarrow R^2$ definida por f(x,y,z) = (-2x+y, 3z). Se pide:
a) Ecuaciones del homomorfismo f respecto a las bases canónicas.
b) Ecuaciones de f respecto a las bases B= {(1,2,-1), (0,1,0), (3,1,1) } y B' = {(0,2), (-1,1)}.
c) Ecuaciones de f respecto a las bases C= {(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)} y C' = {f(1,1,1), f(0,1,0)}.

33.- De un endomorfismo f de R^3 se conocen los siguientes datos:
1) Su rango es 1.
2) Respecto a la base {$\vec{u}_1$(1,0,0), $\vec{u}_2$(1,1,0), $\vec{u}_3$(1,1,1)}, su núcleo tiene por ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} y_1+y_2=0 \\ ay_1-y_2+(a+1)y_3=0 \end{array}\right\}$$

3) Hay un vector $\vec{v}$ (x,0,0) tal que f($\vec{v}$) = $f^2(\vec{v}) = \vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$.
Se pide:
a) Encontrar la ecuación matricial de f respecto a la base canónica de R^3.
b) Ecuaciones implícitas de su núcleo respecto a la base canónica de R^3.

34.- De un endomorfismo f no nulo, del R-espacio vectorial V se conocen los siguientes datos:
1) f tiene la misma matriz respecto a las bases de V:
B = {$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$} y B' = {2$\vec{e}_1$-$\vec{e}_2$, -$\vec{e}_1$+2$\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$+$\vec{e}_2$+2$\vec{e}_3$}
2) Si A es el conjunto de los vectores de la forma x$\vec{e}_1$+2$\vec{e}_3$, con x $\in$ R, entonces f(A) = Im f.
3) f^2 = f
4) $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ pertenece a Im f.

Se pide:
a) Determinar la matriz M de f respecto a la base B.
b) Hallar bases de Ker f e Im f.