APLICACIONES LINEALES

RESUMEN TEÓRICO

1.- Concepto de aplicación lineal.

Dados dos espacios vectoriales E y E′ sobre el mismo cuerpo K de escalares, la aplicación f entre E y E′, diremos que es una **APLICACIÓN LINEAL U HOMOMORFISMO ENTRE ESPACIOS VECTORIALES** cuando se verifican las siguientes condiciones:

$$1.-\ \forall\ \vec{x},\vec{y}\in E,\ \ f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})+f(\vec{y})$$

$$2.-\ \forall\ \vec{x}\in E,\ \ \lambda\in K,\ \ f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

que son los denominados axiomas de linealidad.

La condición necesaria y suficiente para que la aplicación f: E ——> E′ sea lineal es que:

$$\forall\ \vec{x},\vec{y}\in E,\ \ \forall\ \lambda,\mu\in K;\quad f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{y})$$

2.- Clasificación de las aplicaciones lineales.

Según el tipo de aplicación que sea f: E ——> E′; las aplicaciones lineales se pueden clasificar en:

- **MONOMORFISMOS**, si f es una aplicación inyectiva.

- **EPIMORFISMOS**, si f es suprayectiva.

- **ISOMORFISMOS**, si f es aplicación biyectiva.

- Si E = E′, f es **ENDOMORFISMO** y si además f es biyectiva, **AUTOMORFISMO**.

3.- Propiedades de las aplicaciones lineales.

Si f es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E′, se verifican las siguientes propiedades:

1.- Si $\vec{0}\in E,\ f(\vec{0}) = \vec{0}\in E'$ ya que f es un homomorfismo entre los grupos E y E′.

2.- Si $\vec{x}\in E,\ f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}),\ \forall\vec{x}\in E$, por ser f un homomorfismo entre los grupos E y E′.

3.- Si F es un subespacio vectorial de E, f(F) es subespacio vectorial de E′.

4.- Si E^* es subespacio de E′, entonces $f^{-1}(E^*)$ es un subespacio de E (cuando f es isomorfismo entre E y E′).

5.- Si $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son un conjunto de vectores linealmente dependientes de E, sus imágenes $f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2),\ \ldots,\ f(\vec{x}_n)$ son un conjunto de vectores linealmente dependientes de E′.

6.- Si $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son un sistema de generadores de F, $f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2),\ \ldots,\ f(\vec{x}_n)$ son un sistema de generadores del subespacio f(F), siendo F un subespacio vectorial de E.

7.- Si f es aplicación lineal inyectiva, entonces f transforma toda familia libre de E en una familia libre de E′.

8.- Sean E y E′ k-espacios vectoriales y f: E ———> E′ es una aplicación lineal, si E es de dimensión finita, el subespacio f(E) es de dimensión finita.

9.- Una condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que la imagen de una base de E sea una base de f(E).

4.- Imagen de una aplicación lineal.

Si f: E ———> E' es una aplicación lineal entre los espacios E y E', se llama **IMAGEN DE LA APLICACIÓN f**, y lo representamos por **Im(f)**, al conjunto siguiente:

$$Im(f) = f(E) = \{ \vec{y} \in E' \ / \ \exists \ \vec{x} \in E, \ f(\vec{x}) = \vec{y} \}$$

Im(f) es subespacio de E', cuya dimensión se conoce como el rango de f.

Propiedades:

1.- Im(f) $\subset$ E'.

2.- Si Im(f) = E', f es una aplicación suprayectiva.

3.- Si $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \}$ es una base de E, Im(f) es un subespacio vectorial de E', cuya dimensión es el rango del sistema de vectores $\{ f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_p) \}$ pues estos vectores forman un sistema de generadores de Im(f).

4.- La aplicación lineal f queda totalmente determinada al conocer $\{ f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_p) \}$, pues si $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p \}$ es una base de E, se tiene:

$$Si \ \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_p\vec{u}_p$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_p f(\vec{u}_p)$$

5.- Núcleo de una aplicación lineal.

Si f es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E', se llama **NÚCLEO DE f**, y lo representamos por **N(f) ó Ker(f)**, al conjunto siguiente:

$$ker(f) = \{ \vec{x} \in E \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0} \in E' \}$$

Propiedades:

1.- Ker f $\subset$ E.

2.- Ker f es un subespacio vectorial de E.

3.- La condición necesaria y suficiente para que la aplicación lineal f entre E y E' sea inyectiva es que $ker f = \{ \vec{0} \}$.

4.- Si f es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E', se verifica que:

dim ker(f) + dim Im(f) = dim(E)

Es decir, la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio vectorial original de una aplicación lineal.

6.- Expresión analítica de una aplicación lineal.

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E, de dimensión **n** y E' de dimensión **m**, y sean $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \}$ y $B' = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m \}$ bases de E y E' respectivamente.

$$Si\ \vec{x}\in E\ \ y\ \ \vec{x} = x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+\ldots+x_n\vec{u}_n$$

$$(1)\qquad f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{u}_1)+x_2 f(\vec{u}_2)+\ldots+x_n f(\vec{u}_n) \in f(E) \subset E'$$

Ahora bien, los vectores $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$, ..., $f(\vec{u}_n)$ pertenecen a E', por tanto se pondrán expresar como combinación lineal de la base B' de E'. Sean:

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{u}_1) = a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+\ldots+a_{1m}\vec{e}_m \\ f(\vec{u}_2) = a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{2m}\vec{e}_m \\ \qquad\ldots \\ f(\vec{u}_n) = a_{n1}\vec{e}_1+a_{n2}\vec{e}_2+\ldots+a_{nm}\vec{e}_m \end{array}\right\}$$

Si sustituimos estas expresiones en (1) obtenemos:

$$f(\vec{x}) = \left\{\begin{array}{c} = x_1(a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+\ldots+a_{1m}\vec{e}_m) + \\ +x_2(a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{2m}\vec{e}_m) + \\ + \quad \ldots \quad + \\ +x_n(a_{n1}\vec{e}_1+a_{n2}\vec{e}_2+\ldots+a_{nm}\vec{e}_m) \end{array}\right\}$$

Luego:

$$f(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{c} = (x_1a_{11}+x_2a_{21}+\ldots+x_na_{n1})\,\vec{e}_1+ \\ +(x_1a_{12}+x_2a_{22}+\ldots+x_na_{n2})\,\vec{e}_2+ \\ + \quad \ldots \quad + \\ +(x_1a_{1m}+x_2a_{2m}+\ldots+x_na_{nm})\,\vec{e}_m \end{array} \right\} \quad (2)$$

Pero $f(\vec{x}) \in E'$ *y se puede expresar en función de* B':

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_m\vec{e}_m \qquad (3)$$

Si igualamos los segundos miembros de las igualdades (2) y (3) obtenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_na_{n1} \\ y_2 = x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_m = x_1a_{1m} + x_2a_{2m} + \ldots + x_na_{nm} \end{array} \right\} \quad (4)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales que nos relaciona las coordenadas (x_1, x_2, ..., x_n) de un vector de E, referido a la base B, con las coordenadas (y_1, y_2, ..., y_m) de su transformado mediante f con respecto a la base B' de E'. A dichas ecuaciones se les llama **ECUACIONES DE LA APLICACIÓN LINEAL f ó ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE Im(f).**

Si en (4) eliminamos los parámetros x_1, x_2, ..., x_n, obtenemos las **ECUACIONES IMPLÍCITAS ó CARTESIANAS DE Im(f).**

Las ecuaciones (4) se pueden escribir en forma matricial:

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Donde $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

$$A = \left(f(\vec{u}_1)_{B'}, f(\vec{u}_2)_{B'}, \ldots, f(\vec{u}_n)_{B'}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A la matriz A = (a_{ij}) se le llama **MATRIZ DE LA APLICACIÓN LINEAL f.**

7.- Suma de aplicaciones lineales.

Dadas las aplicaciones lineales de E en E', f y g, definimos **f+g** como la aplicación lineal de E en E' tal que:

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \ \forall\, \vec{x} \in E$$

A **f+g** se le llama **APLICACIÓN LINEAL SUMA DE f y g.**

La matriz de la aplicación lineal suma f+g es la suma de las matrices de las aplicaciones lineales de f y de g.

8.- Producto de una aplicación lineal por un escalar.

Sean E y E' dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K y f una aplicación lineal de E en E', sea α un escalar, se llama **PRODUCTO DEL ESCALAR α POR LA APLICACIÓN LINEAL** f a la aplicación lineal que a cada vector $\vec{x}$ le hace corresponder $\alpha(f(\vec{x}))$. Esta aplicación lineal se representa por **αf** ó **α.f**. Se tiene:

$$\alpha . f(\vec{x}) = \alpha[f(\vec{x})], \ \forall\, \vec{x} \in E$$

La matriz del producto del escalar α por la aplicación lineal f es el producto de α por la matriz de f.

Sean E y E' espacios vectoriales sobre un cuerpo K de dimensiones n y m respectivamente. El conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en E' con las operaciones suma y producto por un escalar anteriores, es un espacio vectorial sobre K de dimensión n.m, isomorfo al espacio vectorial de las matrices M_{mxn}.

9.- Producto de aplicaciones lineales.

Sean E, E' y E'' tres espacios vectoriales sobre el cuerpo K, consideremos las aplicaciones f: E ——> E' y h: E' ——> E''.

Se define la **COMPOSICIÓN ó PRODUCTO DE LAS APLICACIONES f y h** como la aplicación lineal h o f: E ——> E'' que al vector $\vec{x}$ de E le hace corresponder $(h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x}))$. Es decir:

$$(h \circ f)(\vec{x}) = h(f(\vec{x})), \ \forall \ \vec{x} \in E$$

La matriz de un producto de aplicaciones lineales es el producto de las matrices de dichas aplicaciones, es decir:

$$(h.f)_{B,B''} = (h)_{B',B''} . (f)_{B,B'}$$

■

PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES LINEALES

Si f es una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E′, se verifican las siguientes propiedades:

1.- Si $\vec{0} \in E,\ f(\vec{0}) = \vec{0} \in E'$ ya que f es un homomorfismo entre los grupos E y E′.

2.- Si $\vec{x} \in E,\ f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}),\ \forall \vec{x} \in E$, por ser f un homomorfismo entre los grupos E y E′.

3.- Si F es un subespacio vectorial de E, f(F) es subespacio vectorial de E′.

4.- Si E^* es subespacio de E′, entonces $f^{-1}(E^*)$ es un subespacio de E (cuando f es isomorfismo entre E y E′).

5.- Si $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son un conjunto de vectores linealmente dependientes de E, sus imágenes $f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2),\ \ldots,\ f(\vec{x}_n)$ son un conjunto de vectores linealmente dependientes de E′.

6.- Si $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ son un sistema de generadores de F, $f(\vec{x}_1),\ f(\vec{x}_2),\ \ldots,\ f(\vec{x}_n)$ son un sistema de generadores del subespacio f(F), siendo F un subespacio vectorial de E.

7.- Si f es aplicación lineal inyectiva, entonces f transforma toda familia libre de E en una familia libre de E′.

8.- Sean E y E′ k-espacios vectoriales y f: E ———> E′ es una aplicación lineal, si E es de dimensión finita, el subespacio f(E) es de dimensión finita.

9.- Una condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que la imagen de una base de E sea una base de f(E).