CAPÍTULO 6

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

6.1.- Introducción. Matrices semejantes.

6.2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

6.3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

6.4.- Subespacios invariantes.

6.5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

6.6.- Aplicaciones

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer los conceptos de: matriz semejante, autovalor, autovector y subespacio propio.
- Calcular el polinomio característico de un endomorfismo, o de su matriz asociada en una cierta base.
- Conocer los conceptos de multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio.
- Calcular los valores y vectores propios de un endomorfismo, o de su matriz asociada en una cierta base.
- Conocer algunas propiedades de: matrices semejantes, autovalores y autovectores.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-92], [KOL 99], [PIT-91], [VILL-94]

CAPÍTULO 7

MATRICES DIAGONALIZABLES

Además de los objetivos generales y competencias que pretendemos que el alumno/a alcance con esta asignatura, los objetivos específicos correspondientes a este capítulo son:

- Conocer las condiciones para que una matriz sea diagonalizable.
- Obtener, si es posible, la matriz diagonal y la matriz del cambio de base.
- Aplicar la diagonalización de matrices al cálculo de la potencia n-ésima de una matriz.
- Asimilar que el problema de reducir una matriz no es otro que el de cambio de base a una más adecuada.

BIBLIOGRAFÍA:

[BUR-93], [GAR/LOP-91], [GAR/LOP-94], [KOL 99], [PIT-91], [VILL-94]

E J E R C I C I O S
CAPÍTULOS 6 Y 7

1.- Calcular los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Hallar el polinomio característico y los autovalores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$. Determinar los vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios.

4.- Sea V un R-espacio vectorial de dimensión 3. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V y $f \in End(V)$ tal que su matriz respecto de dicha base es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular los autovalores y autovectores de f.

5.- Hallar los autovalores y los vectores propios de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.- Calcular los autovalores y subespacios invariantes asociados a las matrices

$$i)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ii)\ B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.- Considérese la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar los espacios propios correspondientes a cada uno de sus valores propios.

8.- ¿ Son semejantes las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

9.- Demostrar que si λ es un autovalor de la matriz A, λ^2 lo es de la matriz A^2 y si A es no singular $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1}.

10.- Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calcular las raíces del polinomio característico. Estudiar si dichas raíces son autovalores. Estudiar si es diagonalizable por semejanza.

11.- En el espacio vectorial $V_3(R)$ se define la transformación lineal t con relación a la base B por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores característicos, los vectores característicos y estudiar su posible diagonalización por semejanza.

12.- ¿ Es diagonalizable la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

13.- ¿ Es diagonalizable la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?