AUTOVALORES

Y

AUTOVECTORES

♦ **Unidad didáctica 1ª: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Capítulo 1: MATRICES: ÁLGEBRA MATRICIAL
Capítulo 2: MATRICES Y DETERMINANTES
Capítulo 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

♦ **Unidad didáctica 2ª: ESPACIOS VECTORIALES**

Capítulo 4: ESPACIOS VECTORIALES
Capítulo 5: APLICACIONES LINEALES

♦ **Unidad didáctica 3ª: DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS**

Capítulo 6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Capítulo 7: MATRICES DIAGONALIZABLES

OBJETIVOS

Los objetivos que pretendemos que se alcancen son:

- **Conocer los conceptos de: matriz semejante, autovalor, autovector y subespacio propio.**
- **Calcular el polinomio característico de un endomorfismo, o de su matriz asociada en una cierta base.**
- **Conocer los conceptos de multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio.**
- **Calcular los valores y vectores propios de un endomorfismo, o de su matriz asociada en una cierta base.**
- **Conocer algunas propiedades de: matrices semejantes, autovalores y autovectores.**

CONTENIDOS

Los contenidos que proponemos para alcanzar los objetivos son:

1.- Introducción. Matrices semejantes.

2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

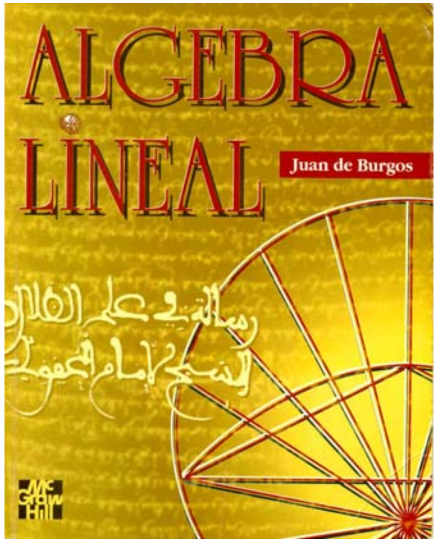
4.- Subespacios invariantes.

5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

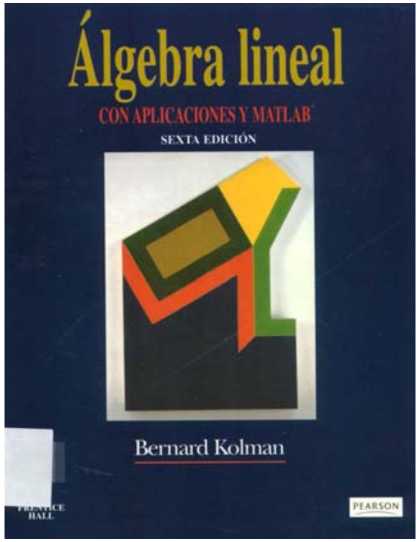
6.- Aplicaciones.

BIBLIOGRAFÍA

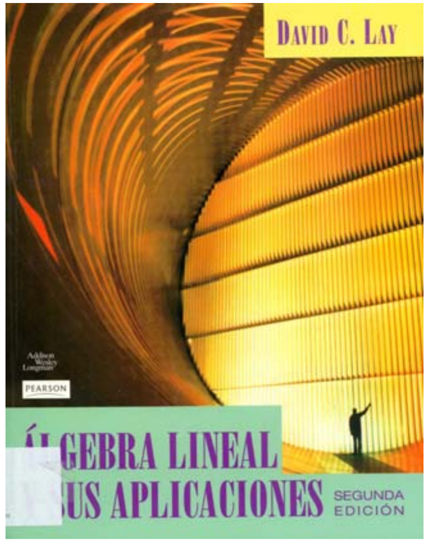
Código: [BUR 93]



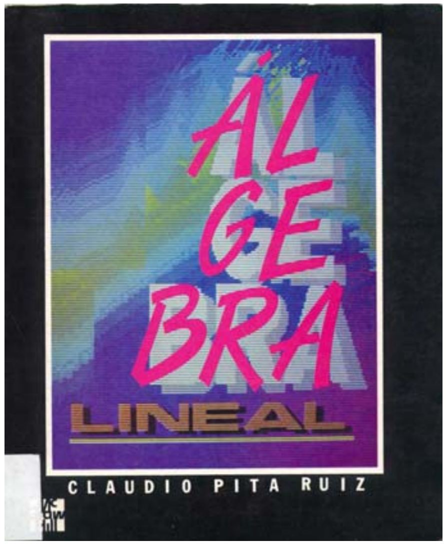
Código: [KOL 99]



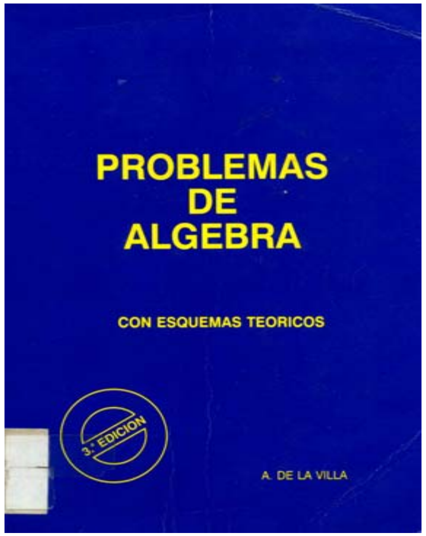
Código: [LAY 99]



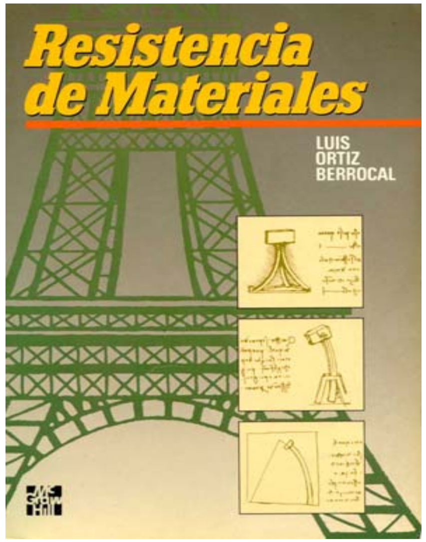
Código: [PIT 91]



Código: [VILL 94]



Código: [ORT 90]



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1.- Introducción. Matrices semejantes.

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Se dice que A es semejante a B, si existe una matriz P (de orden n) inversible, tal que $A = P^{-1} B P$.

Propiedades de las matrices semejantes:

1.- Si A y B son semejantes entonces det(A) = det(B).

2.- Si A y B son semejantes entonces la traza(A) = traza(B).

3.- Si A y B son semejantes entonces A^n y B^n, $n \in N$ también lo son.

4.- Si A es semejante a A' y B es semejante a B', con la misma matriz de paso P, entonces $\lambda A + \mu B$ es semejante a $\lambda A' + \mu B'$.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

1.- Introducción. Matrices semejantes.

Propiedades de las matrices semejantes:

5.- En general, si B es semejante a A y f(A) es un polinomio en A, entonces

$f(B)=P^{-1} f(A) P$.

6.- Las matrices semejantes a una matriz nilpotente, involutiva, idempotente, son matrices nilpotentes, involutivas e idempotentes respectivamente. Esto no significa que todas las matrices nilpotentes, involutivas e idempotentes sean semejantes entre sí.

Sean A y A' dos matrices de orden n. A' es semejante a la matriz A si, y sólo si, A' y A representan la misma aplicación lineal $f : E \to E$, en donde E es un espacio vectorial de dimensión n, respecto de dos bases C y B de E, es decir, $A' = P^{-1}AP$, con P matriz asociada al cambio de base de B a C.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Definición 1a: Sea $f : E \rightarrow E$ un endomorfismo en el espacio vectorial E no nulo de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. El número $\lambda \in \mathbb{K}$ es llamado **valor propio** (valor característico, autovalor o eigenvalor) de f si existe un vector $\overrightarrow{v} \in E$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, tal que $\boxed{f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}}$. En tal caso, al vector $\overrightarrow{v}$ se le llama **vector propio** (vector característico, autovector o eigenvector) correspondiente (o asociado) al valor propio λ.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Definición 1a: Sea $f : E \to E$ un endomorfismo en el espacio vectorial E no nulo de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. El número $\lambda \in \mathbb{K}$ es llamado **valor propio** (valor característico, autovalor o eigenvalor) de f si existe un vector $\overrightarrow{v} \in E$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, tal que $\boxed{f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}}$. En tal caso, al vector $\overrightarrow{v}$ se le llama **vector propio** (vector característico, autovector o eigenvector) correspondiente (o asociado) al valor propio λ.

Definición 1b: Sea A una matriz cuadrada de orden n con valores en un cuerpo $\mathbb{K}$. El número $\lambda \in \mathbb{K}$ es llamado **valor propio** (valor característico, autovalor o eigenvalor) de A si existe un vector $X \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que $\boxed{AX = \lambda X}$. En tal caso, al vector $X \in \mathbb{K}^n$ (ó $M_{n\times 1}$) se le llama **vector propio** (vector característico, autovector o eigenvector) correspondiente (o asociado) al valor propio λ.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

λ es valor propio de f $\Leftrightarrow$ λ es valor propio de A

A es la matiz asociada a f respecto de cualquier base B del espacio vectorial E.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

2.- Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Definición 1a': Sea $f : E \to E$ un endomorfismo en el espacio vectorial E de dimensión n. El número $\lambda \in \mathbb{K}$ es llamado valor propio de f si λ es un valor propio de la matriz A asociada a f respecto de alguna (de cualquiera) base de E.

EJEMPLO:

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

Definición 4: Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, al polinomio (de grado n) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se le llama **polinomio característico** de A. A la ecuación algebraica $p(\lambda) = 0$, es decir, $\det(A - \lambda I) = 0$ se la conoce como **ecuación característica** de la matriz A.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

- Las raíces $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ de $P(\lambda)$ son los ***valores propios*** de **A** (o de **f**).

- Al sustituir cada valor propio λ_i en $(A- \lambda I)X=0$, las soluciones de este sistema son los ***vectores propios*** correspondientes a λ_i.

- El polinomio característico no depende de la base B elegida.

EJEMPLO:

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

Definición 6: Al conjunto de todos los autovalores de cualquier matriz A asociada a un endomorfismo $f : E \to E$, con E espacio vectorial no nulo de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares, se le denomina **espectro de f o espectro de A** y se representa por $\sigma(f)$ ó $\sigma(A)$.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

3.- Polinomio característico y espectro de un endomorfismo.

Definición 6: Al conjunto de todos los autovalores de cualquier matriz A asociada a un endomorfismo $f : E \to E$, con E espacio vectorial no nulo de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares, se le denomina **espectro de f o espectro de A** y se representa por $\sigma(f)$ ó $\sigma(A)$.

Definición 7: Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A, se llama **multiplicidad algebraica** u orden del autovalor λ al orden de multiplicidad, $\mathbf{m}$, de λ como raíz del polinomio característico de A.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

4.- Subespacios invariantes.

Definición 8: Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A, las columnas $X \in \mathbb{K}^n$ $(X \neq 0)$ tales que $AX = \lambda X$ se llaman autovectores de A asociados a λ; todos los autovectores asociados a λ, en unión con el vector nulo, forman un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, que es:

$$\boxed{E_\lambda = \{X \in \mathbb{K}^n \,/\, AX = \lambda X\}}$$

A E_λ se le llama **subespacio propio, invariante o distinguido** de A asociado al autovalor λ.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

4.- Subespacios invariantes.

Definición 10: Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A (o de f), se llama **multiplicidad geométrica del autovalor λ** a la dimensión, $\mathbf{d}$, del subespacio propio de A (o de f), asociado a λ.

EJERCICIO 3.

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

(Ver también las transparencias)

Propiedad 1: *Sean* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ *autovalores distintos de una matriz* A *de orden* n *asociada a un endomorfismo* f *en una cierta base y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo* $\mathbb{K}$, *entonces los autovectores correspondientes a los autovalores distintos son linealmente independientes.*

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

(Ver también las transparencias)

Propiedad 1: *Sean* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ *autovalores distintos de una matriz* A *de orden* n *asociada a un endomorfismo* f *en una cierta base y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo* $\mathbb{K}$, *entonces los autovectores correspondientes a los autovalores distintos son linealmente independientes.*

Propiedad 2: *Sean* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ *autovalores distintos de una matriz* A *de orden* n *asociada a un endomorfismo* f *en una cierta base y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo* $\mathbb{K}$, *entonces los subespacios propios* E_{λ_i} *asociados a los autovalores* λ_i, *para* $i = 1, 2, .., p$, *son independientes.*

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

Propiedad 3: *Sea A una matriz de orden n asociada a un endomorfismo f en una cierta base y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$. Si los autovalores distintos de A son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ y si las multiplicidades geométricas de éstos se denotan por $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ para $i = 1, 2, ..., p$, entonces el número máximo de autovectores linealmente independientes de A es $d_1 + d_2 + \cdots + d_p$.*

Nótese que, si m_i es la multiplicidad algebraica de λ_i, se verifica:

$$p \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_p \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_p \leq n.$$

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

5.- Propiedades de autovalores y autovectores.

Propiedad 3: *Sea A una matriz de orden n asociada a un endomorfismo f en una cierta base y cuyos elementos pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$. Si los autovalores distintos de A son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ y si las multiplicidades geométricas de éstos se denotan por $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ para $i = 1, 2, ..., p$, entonces el número máximo de autovectores linealmente independientes de A es $d_1 + d_2 + \cdots + d_p$.*

Nótese que, si m_i es la multiplicidad algebraica de λ_i, se verifica:

$$p \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_p \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_p \leq n.$$

Propiedad 4: *Los autovalores de toda matriz simétrica definida sobre $\mathbb{R}$ son números reales.*

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

6.- Aplicaciones.

ALGORITMO DE DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ CUADRADA

Para diagonalizar la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ síganse los siguientes pasos:

Paso 1^o: Constrúyase la matriz $A - \lambda I$.

Paso 2^o: Calcúlese $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (Polinomio característico).

Paso 3^o: Hállense las raíces de $p(\lambda)$: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ con sus correspondientes multiplicidades algebraicas $m_1, m_2, \cdots, m_p$.

Paso 4^o: Verifíquese: ¿$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$?

4.1.- La respuesta es negativa: **FIN.** A no es diagonalizable.

4.2.- La respuesta es afirmativa: Realícese el **Paso 5^o**.

Paso 5^o: Para cada λ_i determínese su multiplicidad geométrica d_i y una base de dicho subespacio $\{\overrightarrow{e_{i1}}, \overrightarrow{e_{i2}}, \cdots, \overrightarrow{e_{id_i}}\}$.

Paso 6^o: Verifíquese: $\forall\ i$, ¿$m_i = d_i$?

6.1.- La respuesta es negativa: **FIN**. A no es diagonalizable.

6.2.- La respuesta es afirmativa: Realícese el **Paso 7^o**.

Paso 7^o: Constrúyase la matriz diagonal D y P.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Donde los λ_i son los autovalores de A y las columnas de P son columnas de coordenadas de los vectores de las bases de los respectivos subespacios propios de A calculados en el **Paso 5^o**.

Paso 8^o: Compruébese que

$$D = P^{-1}AP.$$

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

6.- Aplicaciones.

- **Clasificación de formas cuadráticas.**
- **Estudio de las cónicas y las cuádricas.**
- **Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.**
- **Estudio de sistemas dinámicos discretos, etc.**

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

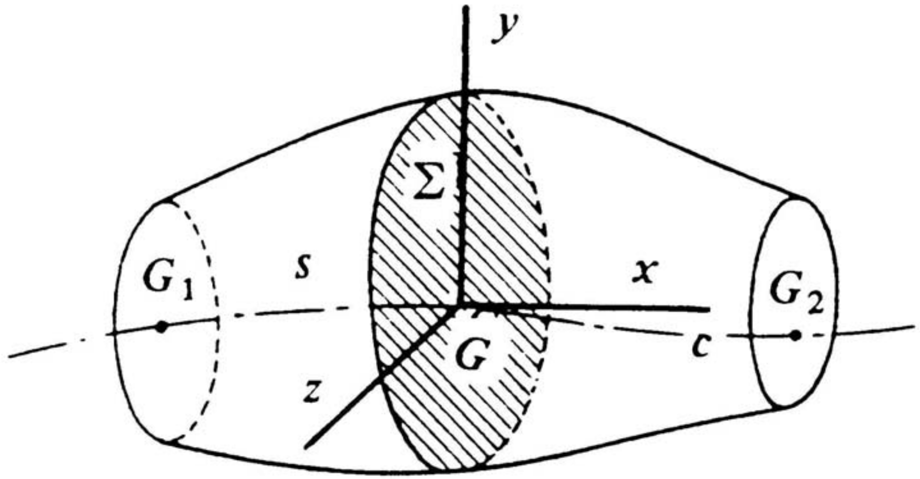
6.- Aplicaciones.

ESTADO TENSIONAL DE UN PRISMA MECÁNICO.

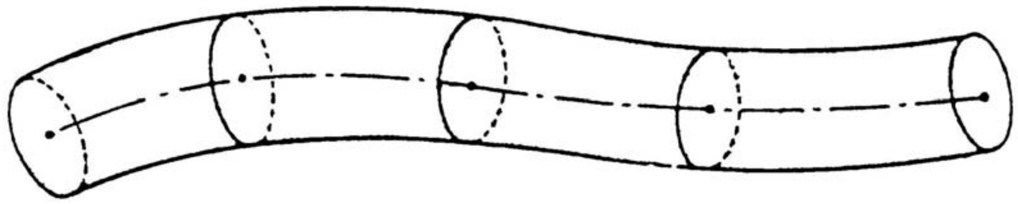
- **Objetivo: Calcular las tensiones que se producen en una máquina o una estructura al aplicarle un determinado sistema de fuerzas exteriores.**

- **Con objeto de estudiar los sólidos elásticos se crea un modelo teórico que se denomina prisma mecánico.**

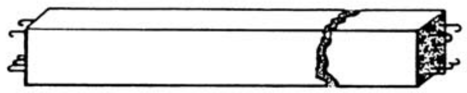
● **Definición:** **Llamaremos** **prisma mecánico** **al sólido engendrado por una sección plana Σ de área Ω cuyo centro de gravedad G describe una curva *c* llamada *línea media o directriz*, siendo el plano que contiene a Σ normal a la curva.**

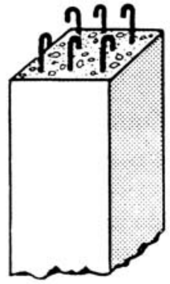


● **Barra.** Se llama así al prisma mecánico cuyas dimensiones de la sección transversal son pequeñas, en comparación con la longitud de la línea media.
Es el más utilizado en en la mayoría de las estructuras de las obras.

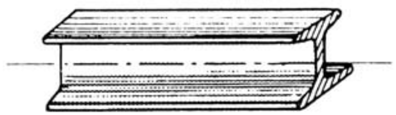


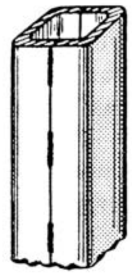
En estructuras de hormigón armado la forma más empleada es la sección transversal rectangular en vigas y cuadrada en pilares.



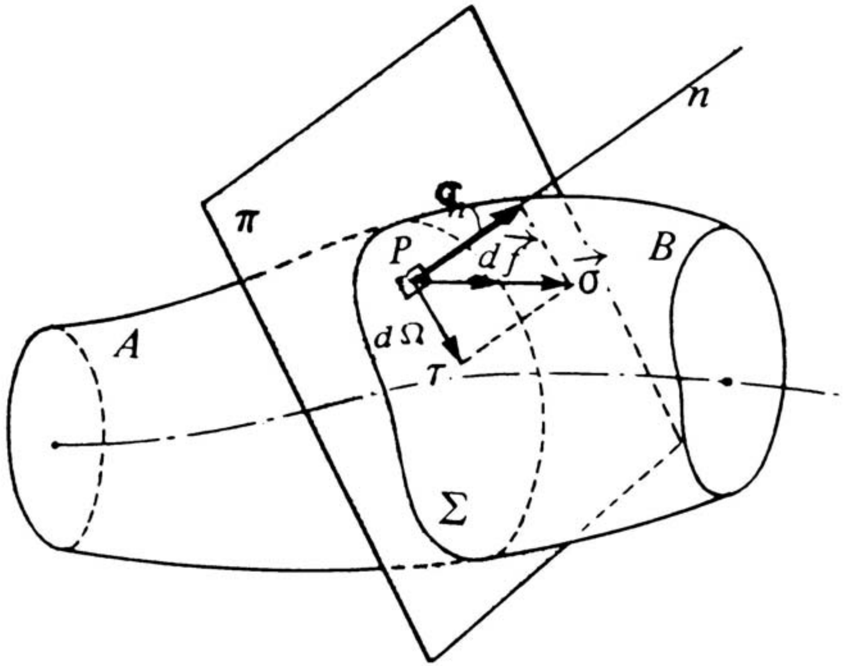


En estructuras metálicas las secciones más usuales son el perfil laminado doble te I en vigas, o dos secciones en U soldadas en pilares.

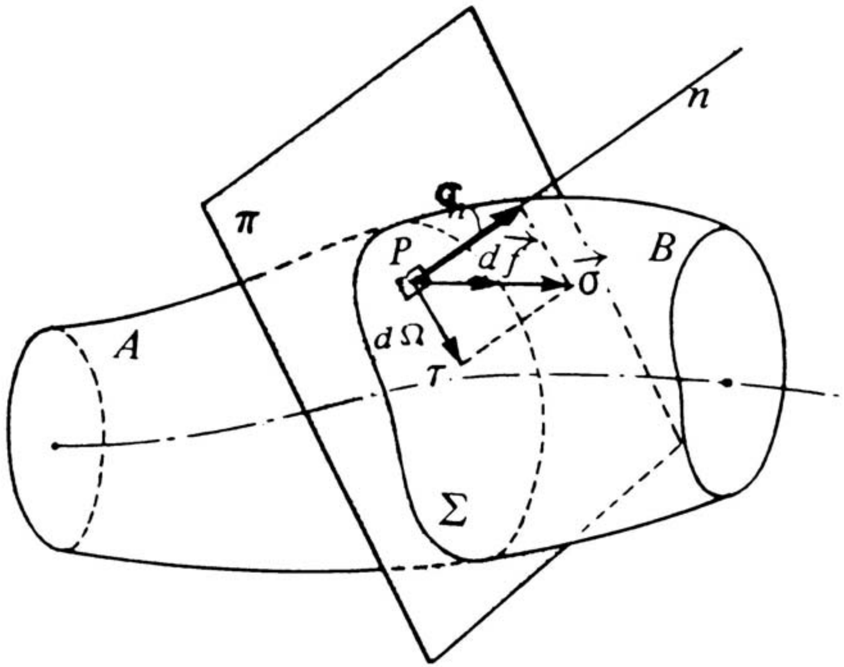




♦ Supondremos un prisma mecánico sometido a una fuerza exterior e imaginémoslo cortado idealmente en dos partes A y B por medio de un plano π.



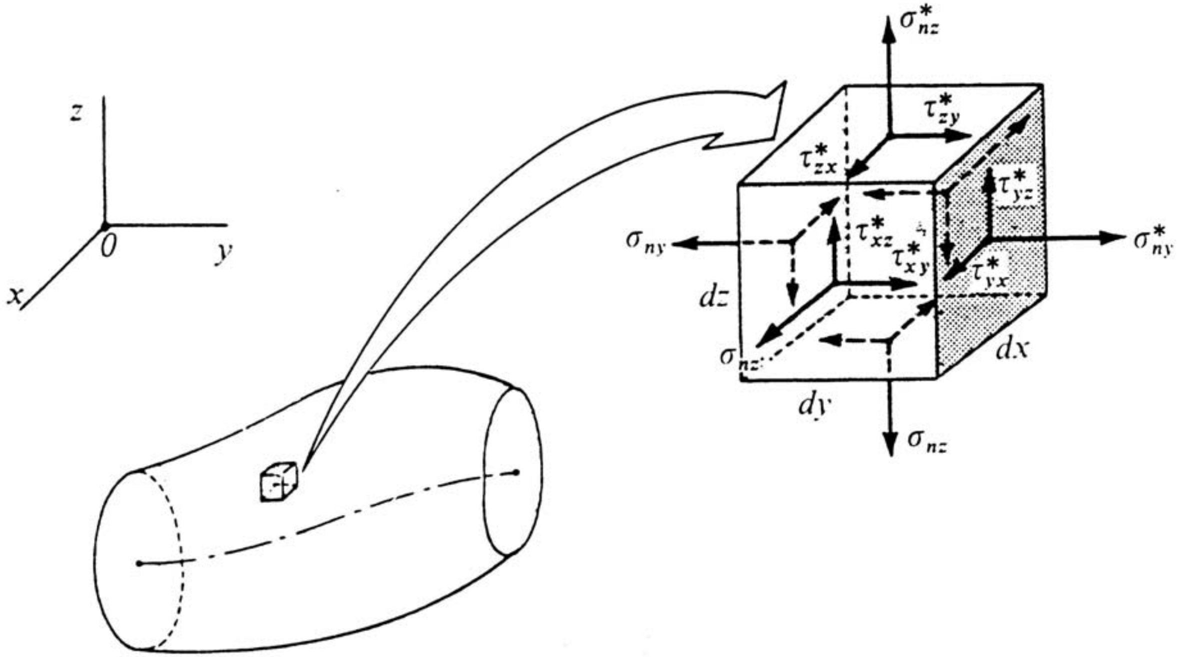
Si ahora suponemos suprimida una de las partes, por ejemplo la B, de la condición de equilibrio elástico se desprende la existencia de una distribución continua de fuerzas $\overrightarrow{df}$, definida en los puntos de A pertenecientes a la sección $\sum$, equivalente al sistema formado por la parte del esfuerzo exterior que actúa sobre la parte suprimida.



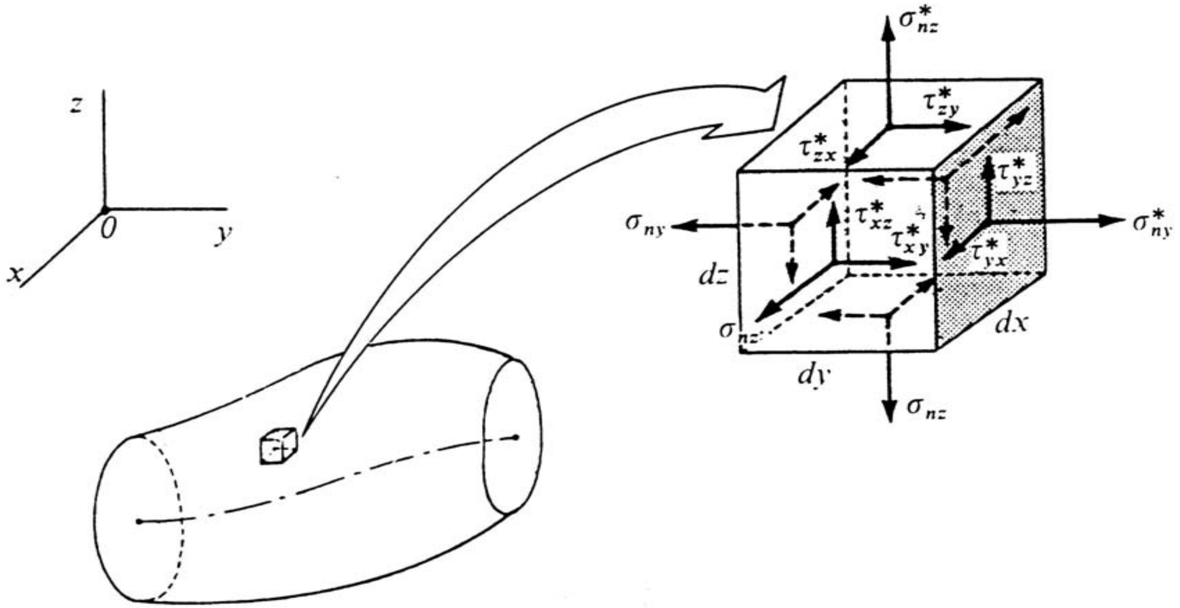
Sea P un punto $P \in \sum$, se define la **tensión en el punto P según el plano π** al cociente

$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{\vec{df}}{d\Omega}.}$$

Como se ve en la figura, la tensión $\vec{\sigma}$ es un vector colineal con $\vec{df}$ y su módulo representa la magnitud del esfuerzo interior ejercido en la sección $\sum$ por unidad de superficie.



● Si ahora consideramos el entorno paralepipédico de un punto P interior del prisma, de aristas paralelas a los ejes de un sistema cartesiano $Oxyz$, sobre cada una de sus caras existe un vector tensión cuyas componentes intrínsecas normales tendrán las direcciones de los ejes coordenados respectivos, y las tangenciales se podrán descomponer a su vez en las direcciones de los ejes paralelos a la cara que se considere.



Las tensiones normales las descomponemos por

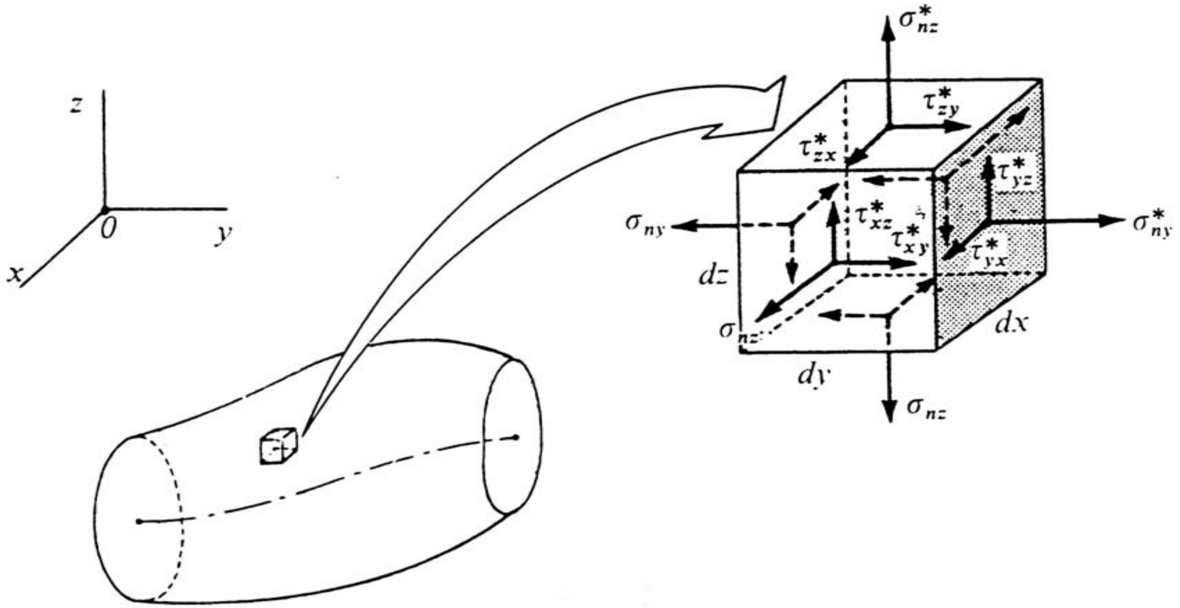
$$\boxed{\sigma_{ni} \quad (i = x, y, z)}$$

donde el índice i indica el eje al cual son paralelas y convendremos en asignarles signo positivo si son de tracción y negativo si se trata de compresión.

Las tensiones tangenciales las representamos por

$$\boxed{\tau_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad i \neq j}$$

indicando el primer índice i la dirección normal al plano en que actúa y el segundo j la dirección del eje al cual es paralela.



● Si distinguimos con * las tensiones en las caras de coordenadas $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, las relaciones que existen entre las tensiones correspondientes a caras paralelas, por ejemplo, las caras del paralelepípedo perpendiculares al eje x, en virtud de la continuidad de las tensiones, son:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^*_{nx} &= \sigma_{nx} + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} dx \\ \tau^*_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \\ \tau^*_{xz} &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \end{aligned}}$$

- Se plantean las condiciones de equilibrio estático del paralelepípedo aislado, y teniendo en cuenta el equilibrio de fuerzas y el equilibrio de momentos podremos decir que el conocimiento de los seis valores independientes

$$\boxed{\sigma_{nx},\ \sigma_{ny},\ \sigma_{nz},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy}}$$

permite conocer el vector tensión

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}\ (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)}$$

correspondiente a una orientación genérica definida por el vector unitario normal

$$\boxed{\overrightarrow{u}\ (\alpha, \beta, \gamma),}$$

mediante la expresión

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

$$[\overrightarrow{\sigma}] = [T]\,[\overrightarrow{u}]$$

que indica que la matriz del vector tensión correspondiente a un determinado plano se obtiene multiplicando la matriz

$$\boxed{[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{pmatrix}}$$

denominada **“matriz de tensiones”**, por la matriz del vector unitario normal a dicho plano.

De los infinitos planos de radiación de vértice el punto P existen tres, ortogonales entre sí, para los cuales los vectores tensión correspondientes son normales a ellos, careciendo, por tanto, de componente tangencial.

Los vectores unitarios que definen estas tres direcciones, llamadas **"direcciones principales"** se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{nx} - \sigma)\,\alpha + \tau_{xy}\beta + \tau_{xz}\gamma = 0 \\ \tau_{xy}\alpha + (\sigma_{ny} - \sigma)\,\beta + \tau_{yz}\gamma = 0 \\ \tau_{xz}\alpha + \tau_{yz}\beta + (\sigma_{nz} - \sigma)\,\gamma = 0 \end{aligned}\right\}$$

en donde σ toma los valores de las raíces de la **ecuación característica**

$$\begin{vmatrix} \sigma_{nx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

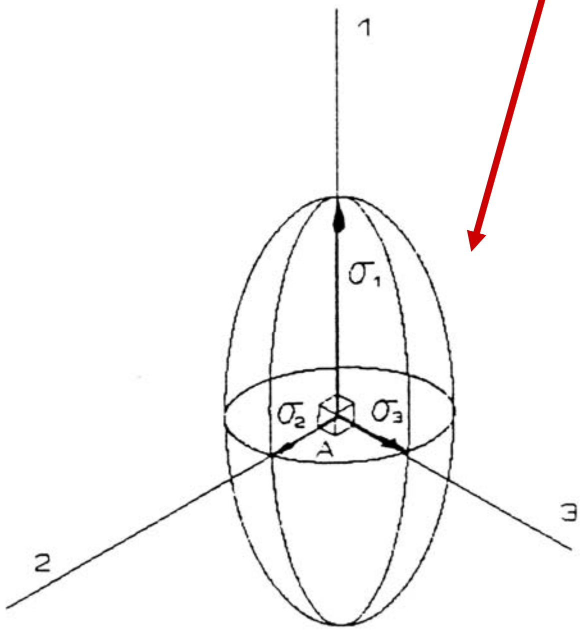
que se obtiene al imponer la condición de compatibilidad del anterior sistema homogéneo de ecuaciones.

Las raíces de esta ecuación, que no son otra cosa que los **valores propios de la matriz de tensiones** $[T]$, reciben el nombre de **"tensiones principales"**. Son las tensiones correspondientes a los planos normales a las direcciones principales.

El lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión para infinidad de planos de radiación de vértice el punto que se considera es un elipsoide llamado **"elipsoide de tensiones o elipsoide de Lamé"**. Su ecuación, referida a un sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales, es

$$\boxed{\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1}$$

siendo σ_1, σ_2, σ_3 los valores de las tensiones principales.



- Cuando las tres tensiones principales son iguales el elipsoide de Lamé es una esfera.

- Cuando una de las tensiones se anula, se forma una elipse.

Ejemplo 1 de aplicación: La matriz de tensiones en un punto interior de un sólido elástico, referido a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ es,

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

estando expresadas sus componentes en $\mathrm{N/mm^2}$. Se pide:

1^o) Determinar las tensiones y direcciones principales.

2^o) Calcular analíticamente las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano de vector unitario $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Solución:

1º De la matriz de tensiones se deduce la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 5-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -6-\sigma & -12 \\ 0 & -12 & 1-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando el determinante se llega a

$$-\sigma^3 + 175\sigma - 750 = 0,$$

cuyas raíces del polinomio característico son las tensiones principales

$$\sigma_1 = 10 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_2 = 5 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_3 = -15 \text{ N/mm}^2.$$

Las direcciones principales las determinamos sustituyendo los valores de las tensiones principales en el sistema homogéneo de ecuaciones:

Para $\sigma_1 = 10$ N/mm^2

$$\begin{pmatrix} 5-10 & 0 & 0 \\ 0 & -6-10 & -12 \\ 0 & -12 & 1-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{u_1}\left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).}$$

Para $\sigma_2 = 5$ N/mm^2

$$\begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 0 & -6-5 & -12 \\ 0 & -12 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{u_2}\,(1, 0, 0).}$$

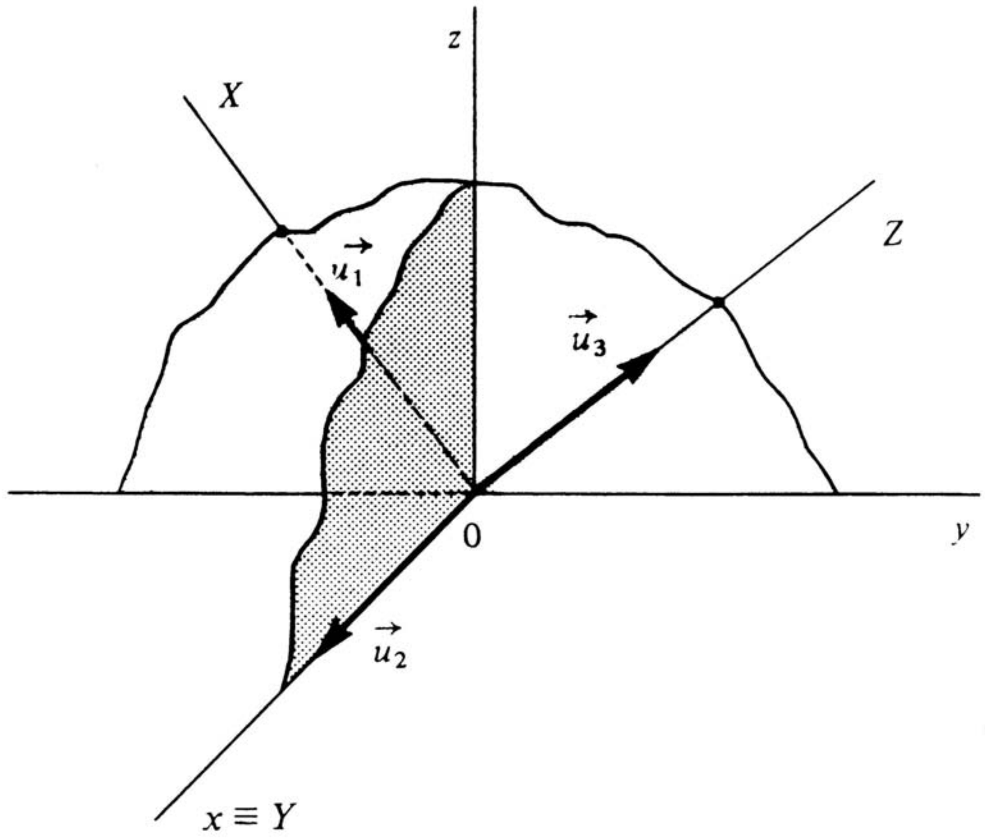
Para $\sigma_1 = -15$ N/mm^2

$$\begin{pmatrix} 5+15 & 0 & 0 \\ 0 & -6+15 & -12 \\ 0 & -12 & 1+15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{u_3}\left(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).}$$

Por tanto, las direcciones principales vienen definidas por los vectores unitarios siguientes:

$$\overrightarrow{u_1}\left(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right); \quad \overrightarrow{u_2}\,(1,0,0); \quad \overrightarrow{u_3}\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

Se representan en la siguiente figura referidos a la terna $Oxyz$.



2º El vector tensión correspondiente al plano definido por $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, será

$$[\overrightarrow{\sigma}] = [T]\,[\overrightarrow{u}] = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} \\ -9 \\ -11/2 \end{pmatrix}$$

del que fácilmente se deducen los valores de las componentes intrínsecas

$$\sigma_n = \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} - \frac{11}{4} = -4,75 \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{123,75 - 22,56} = 10,06 \text{ N/mm}^2.$$

DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

6.- Aplicaciones.

CRITERIOS DE RESISTENCIA. TENSIÓN EQUIVALENTE.

- **Objetivo:** **Nos interesa poder medir la seguridad de una pieza perteneciente a una estructura, atendiendo a las características del material en cuanto a la capacidad de resistencia media en términos de tensiones en el laboratorio.**

En este sentido, para garantizar que las tensiones no sobrepasen en ningún punto del sólido elástico un determinado valor límite $\sigma_{\lim}$, consideraremos como tensión máxima de cálculo o **"tensión admisible"** el valor dado por la expresión

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{\lim}}{n}}$$

siendo n un número mayor que la unidad llamado *"coeficiente de seguridad"*.

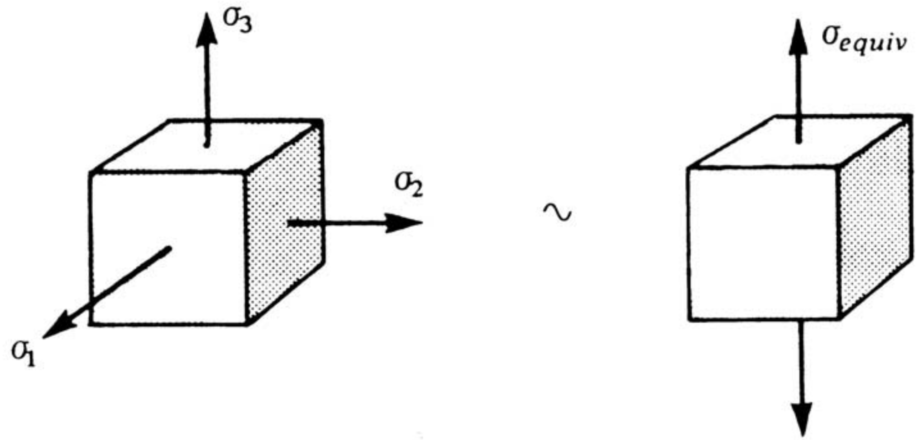
Se toma como $\sigma_{\lim}$ la tensión de rotura σ_r en el caso de materiales frágiles, como son los hormigones, piedras y materiales cerámicos, y el límite elástico σ_e en el caso de materiales dúctiles, tales como el acero dulce, aluminio, etc.

- Existen infinidad de casos en los que un material va a estar sometido a un estado tensional espacial. Como generalmente la información que disponemos de ese material es su *límite elástico* (σ_e) o de *rotura* (σ_r), obtenido en el ensayo a tracción o compresión, sería deseable poder establecer algún criterio que nos permita encontrar un estado de tensiones monoaxial equivalente al estado triple que se considere y así hacer la comparación de esta tensión equivalente con los límites del material.

Varios son los criterios que se han propuesto para fijar la **”tensión equivalente”**, es decir, la tensión que existiría en una probeta de un material sometido a tracción monoaxial tal que tuviera igual resistencia que el elemento del sólido elástico sometido al estado triple dado.

Si consideramos un material sometido a un estado tensional cualquiera, cuyas tensiones principales en un punto son σ_1, σ_2, σ_3 $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$, la tensión equivalente (σ_{equiv}), según el *criterio de la energía de distorsión o de Von Mises* es la siguiente:

$$\boxed{\sigma_{equiv} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}.}$$



Ejemplo 2 de aplicación: La matriz de tensiones en un punto interior de un sólido elástico, referido a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ es,

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

estando expresadas sus componentes en $\mathrm{N/mm^2}$. Calcular la tensión que habría que someter a una probeta del mismo material en un ensayo a tracción para que tuviera el mismo coeficiente de seguridad que el sólido considerado, de acuerdo con el criterio de Von Mises.

Solución:

En primer lugar calculamos los autovalores de la matriz de tensiones. Para ello calculamos las raíces del polinomio característico, esto es, calculamos

$$\begin{vmatrix} 5-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -6-\sigma & -12 \\ 0 & -12 & 1-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando el determinante se llega a

$$-\sigma^3 + 175\sigma - 750 = 0,$$

cuyas raíces son los autovalores

$$\sigma_1 = 10 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_2 = 5 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_3 = -15 \text{ N/mm}^2.$$

La tensión que tendría una probeta del mismo material en un ensayo a tracción con el mismo coeficiente de seguridad que el sólido considerado es precisamente la tensión equivalente, que según nuestro caso es:

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(10-5)^2 + (5-(-15))^2 + (-15-10)^2\right]} = \boxed{22,913 \text{ N/mm}^2.}$$