EJERCICIOS

1.- En el espacio afín A$_3$ se consideran los sistemas de referencia $R = \{0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $R' = \{0', \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ tales que $O'(-1,8,3)$ y

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{v_3} &= -\overrightarrow{u_1} + 5\overrightarrow{u_2} - 7\overrightarrow{u_3} \end{aligned}\right\}$$

Hállese:

a) Ecuaciones del cambio de sistema de referencia

b) Si un punto X tiene por coordenadas la terna de números reales $(1,-5,4)$ respecto del sistema R' ¿cuáles son sus coordenadas respecto de R?

c) Si un punto P tiene por coordenadas $(1,-12,23)$ respecto de R, ¿cuáles son sus coordenadas respecto del sistema R'?

2.- a) Si O es el vértice de un cubo y $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son los vectores definidos por las aristas que concurren en O, calcular las coordenadas del vértice A, opuesto a O.

¿Cuáles serán las coordenadas del centro del cubo M?

b) Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas al pasar del sistema $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ al $(O', \overrightarrow{u_1}', \overrightarrow{u_2}', \overrightarrow{u_3}')$ ligado al primero mediante las relaciones:

el nuevo origen es el punto $O'(3,1,2)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1}' &= \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_2}' &= \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3}' &= \overrightarrow{u_3} + \overrightarrow{u_1} \end{aligned}$$

3.- Sean $R = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y $R' = \{O', \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Hallar la fórmula del cambio de sistema de referencia de R y R', siendo $O(2,-3)$ respecto a R' y

$$\overrightarrow{u_1} = 4\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{u_2} = 3\overrightarrow{v_1} + 6\overrightarrow{v_2}$$

4.- Sean $R = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y $R' = \{O', \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Hallar la fórmula del cambio de sistema de referencia siendo $(2,3)$, $(1,-1)$, $(5,4)$ las coordenadas de O', $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ respecto de $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

5.- Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas del sistema de referencia $R = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ al sistema de referencia $R' = \{O', \overrightarrow{u_1'}, \overrightarrow{u_2'}, \overrightarrow{u_3'}\}$ siendo $(1,0,-2)$ las coordenadas de O' respecto de R y $(2,0,-1)$, $(0,1,1)$, $(-1,3,0)$ las coordenadas de $\overrightarrow{u_1'}, \overrightarrow{u_2'}, \overrightarrow{u_3'}$ respecto de $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

6.- En el espacio afín real A_3 y respecto de una referencia cartesiana $R = \{0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, se consideran los puntos $O'(1,2,1), A(2,3,1), B(2,2,2)$ y $C = (4,3,1)$. Sea $R' = \{O, \overrightarrow{u_1'}, \overrightarrow{u_2'}, \overrightarrow{u_3'}\}$ una referencia cuyos ejes son las rectas $O'A$, $O'B$, $O'C$.

Determinar R' sabiendo que un punto D tiene de coordenadas $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ en la referencia R y $(1,1,1)$ en R'. Hallar las ecuaciones que facilitan el cambio de coordenadas.

7.- Sean $P(1,2,3)$ y $Q(6,-3,4)$ dos puntos de A_3 respecto de un sistema de referencia R. Hallar las coordenadas y las componentes del vector PQ.

8.- Conocidos P y Q y el número k, determinar el punto X tal que $(XPQ) = k$.

9.- Hallar el punto medio del segmento determinado por los puntos P y Q.

10.- Escribir en las formas vectorial, paramétrica y continua las ecuaciones de la recta r

a la que pertenecen los puntos$P(1,2,3)$y$Q(-6,3,8)$.

11.- Hállense las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua e implícitas de la recta r a la que pertenecen los puntos $A(1,6,-3)$ y $B(0,1,9)$.

12.- Se considera la recta r cuyas ecuaciones implícitas son:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} -5x + y - 1 = 0 \\ 12x + z - 9 = 0 \end{array} \right\}$$

A partir de ellas dedúzcanse sus ecuaciones paramétricas.

13.- Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3,-1,2)$ y $B(1,2,4)$ en sus distintas formas.

14.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv 2 + 3x - 4y = 0$$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right.$$

15.- Hallar las ecuaciones de las rectas r y s paralelas a los ejes x e y, respectivamente, e incidentes con el punto $(-3,4)$.

16.- a) Averiguar si los puntos $P(2,5)$, $Q(2,2)$ y $R(6,5)$ son incidentes con la recta r de ecuación $2 + 3x - 4y = 0$.

b) Hallar la ecuación de la recta que incide con r y s simuntáneamente y es paralela a t, siendo $r\,:\,2 - 3x + y = 0$, $s\,:\,1 + 2x + 3y = 0$ y $t\,:\,4 + 3x - 5y = 0$

17.- Escríbanse en las formas vectorial, paramétrica y cartesiana la ecuación del plano definido por el punto $P(1,6,-2)$ y los vectores, de distinta dirección $\vec{v}(-6,3,2)$ y $\vec{w}(1,7,-4)$.

18.- Hallar la ecuación del plano al que pertenecen los puntos $P(1,2,3)$, $Q(-3,-4,7)$ y $S(8,-3,0)$.

19.- Hallar la ecuación del plano al que pertenecen los puntos $A(3,-1,2)$, $B(0,2,1)$ y $C(5,4,6)$.

20.- Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general de los planos siguientes:

a)Pasa por $A(1,0,1)$, $B(2,0,-1)$ y $C(1,1,2)$

b) Pasa por $P(3,-1,0)$ y tiene como vectores directores $\vec{a}(1,2,3)$ y $\vec{b}(0,0,1)$.

21.- Determínense las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(0,3,-2)$ y que tiene por vectores de dirección $\vec{v}(1,6,4)$ y $\vec{w}(2,1,3)$.

22.- ¿Cuál es la ecuación implícita o cartesiana del plano anterior?

23.- Hállense las coordenadas de los vértices de un paralelepípedo, sabiendo que uno de ellos es $A(6,3,-2)$ y que los lados son vectores que pertenecen a los vectores libres $\vec{a}(8,-1,6)$, $\vec{b}(7,-3,4)$, y $\vec{c}(1,0,2)$.

24.- Se considera en el espacio afín tridimiensional A_3 , los sistemas de referencia: $R = \{O,\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ y $R' = \{O',\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ tales que $O'(-1,6,2)$, $\vec{v}_1(1,3,1)$, $\vec{v}_2(-1,0,0)$ y $\vec{v}_3(2,5,7)$. Si un plano tiene por ecuación $2x - y + 3z - 5 = 0$ con respecto a R, ¿Cuál es su ecuación con respecto a R'?

25.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y por el punto $P(-1,-2,5)$.

26.- Sea el plano que pasa por los puntos $P(1,0,3)$, y $Q(2,2,1)$ y tal que $\vec{u}(2,0,1)$ es uno de sus vectores directores. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones paramétricas y general del plano.

b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección del plano anterior con el plano $x+y+z=2$.

27.- Hallar las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y cuyo vector de dirección es $\vec{v}(-2,5,7)$.

28.- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5+3\lambda \\ y = 7-\lambda \\ z = 8+9\lambda \end{cases}$$

y al punto $P(1,6,-3)$.

29.- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5+3\lambda \end{cases}$$

y al punto $P(1,-2,-4)$.

30.- Determinar:

a) Recta r que pasa por los puntos $A(1,1,-1)$ y $B(2,2,3)$.

b) Recta s que pasa por el punto $P(1,0,1)$ y tiene a $\vec{v}(1,2,1)$ por vector director.

Obtener las ecuaciones paramétricas y una expresión en forma continua de las mismas. Expresar como intersección de dos planos dichas rectas.

31.- Estúdiese la posición relativa de los planos $5x-y-3z+2=0$ y $15x-3y-9z+17=0$.

32.- Estúdiese la posición relativa de los planos $5x-y-3z+2=0$ y $15x-3y-9z+6=0$.

33.- Estúdiese la posición relativa de los planos $2x-y-z+3=0$ y $x+3y+4z-5=0$.

34.- Estúdiese la posición relativa de los planos $x+y-z+5=0$, $3x-3y+4z-3=0$ y $2x+2y-2z+9=0$.

35.- Estudiar las posiciones relativas de los planos: $ax+ay+z=1$, $x+ay+az=1$ y $ax+y+az=1$.

36.- Sean los planos: $bx+2y+z+2-a=0$, $ay+z=0$ y $3x+2y+z-3=0$. Se pide:

a) Determinar para qué valores de a y b forman triedro, y obtener el lugar geométrico del vértice.

b) Valores de a y b para que formen haz. Ecuación del eje del haz.

c) Valores de a y b para los cuales son caras de un prisma.

37.- Hállense las ecuaciones implícitas de las rectas r que se apoya en las rectas:

$$s \equiv \begin{cases} x-y-z+3=0 \\ x+2y+3z+4=0 \end{cases}$$

y

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2z - 5 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

y que pasa por el punto $P(1,6,-3)$.

38.- Calcular la posición relativa de las rectas:

a) $3 - x + 2y = 0$ y $1 + 2x - 4y = 0$

b) $2 - x + y = 0$ y $1 - x - y = 0$

39.- Estudiar las posiciones relativas de las rectas:

a)$1 - 2x + 3y = 0,\ 4 + x + y = 0$ y $1 - x - 2y = 0.$

b) $4 + x - 2y = 0,\ 1 - 2x + 4y = 0$ y $-2 + 3x + y = 0.$

40.- Hállese el plano que pasa por la intersección de los planos $x - y - z + 3 = 0$ y $x + 2y - 3z + 5 = 0$ y es paralelo a la recta

$$\frac{x-5}{8} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$$

.

41.- Estúdiese la posición relativa del plano $x - y - z + 3 = 0$ y de la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - \lambda \\ x = 7 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

42.- Se consideran el plano $x - y - az + 5 = 0$ y la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$$

Hállese el valor de a para el cual el plano es paralelo a la recta.

43.- En el espacio afín real A_2 y respecto de una cierta referencia cartesiana, se considera el triángulo de vértices $A(3,1)$, $B(-1,-1)$, $C(-3,5)$. Se pide:

a) Ecuaciones de sus lados y coordenadas de los puntos medios de ellos.

b) Ecuaciones de sus medianas, comprobando que las tres se cortan en el mismo punto.

c) Compruébese que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado tiene sus lados paralelos a este.

44.- Calcular el punto de la recta $x - y = 3$ tal que su razón simple con los puntos $(3,0)$ y $(0,-3)$ sea -1. Interpretar el resultado.

45.- Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo.

46.- Dadas las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{array} \right.$$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{array} \right.$$

a) Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas r y s estén en el mismo plano.

b) Determinar p y q para que el plano pase por el punto $(1,1,1)$.