EJERCICIOS

1.- Demuéstrese la siguiente proposición: "Si $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ es una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo de dimensión 3, todo vector de dicho espacio puede escribirse como combinación lineal de $\{u_1,u_2,u_3\}$ en la siguiente forma:

$$\vec{x} = (x\overrightarrow{u_1})\overrightarrow{u_1} + (x\overrightarrow{u_2})\overrightarrow{u_2} + (x\overrightarrow{u_3})\overrightarrow{u_3}$$

conocida como fórmula de Parseval"

2.- Conocidas las coordenadas $A(a,a')$, $B(b,b')$ y $C(c,c')$ de los vértices de un triángulo, calcúlense vectorialmente las coordenadas de su baricentro.

3.- Demostrar vectorialmente el teorema de los senos en un triángulo.

4.- Demuéstrese que si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, distintos de 0, son ortogonales dos a dos son linealmente independientes.

5.- Se considera el paralelepípedo recto de la figura 2.16 del que se conocen los vértices $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$ y $G(0,5,3)$. Hállense los restantes vértices y los ángulos AOB, OBD, DCG y GEF.

6.- Un vector unitario $\vec{u}$ forma ángulos iguales con cada uno de los ejes de coordenadas. Exprésese este vector en función de sus coordenadas cartesianas rectángulares (en función de la base métrica $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$).

7.- Consideremos los vectores $\vec{u} = 6\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$ y $\vec{v} = 3\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$ siendo $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ una base métrica del espacio. Detérminese el número λ tal que el vector $\vec{u} + \lambda\vec{v}$ sea ortogonal al vector $\vec{w} = -2\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2} + 5\overrightarrow{u_3}$.

8.- Hállese el área del paralelogramo $ABCD$ tal que AB y DC pertenecen al vector libre $a(1,2,3)$ y BC y AD pertenecen al vector libre $b(-3,-2,1)$.

9.- Calcúlese el área del triángulo ABC tal que $A(2,3,5)$, $B(-2,7,2)$ y $C(4,3,-2)$.

10.- Hállese el valor de λ para que los vectores $\vec{a} = 2\overrightarrow{u_1} - \lambda\vec{u}_2 + 5\overrightarrow{u_3}$, $b = 3\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \lambda\overrightarrow{u_3}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$ sean coplanarios.

11.- Demuéstrese que $\forall\ \vec{a},\vec{b} \in V^3$, se verifica que
$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$

12.- Se consideran la base métrica $B = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ y los vectores $\vec{a} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + 5\overrightarrow{u_3}$ y $\vec{b} = 4\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$.
Obténgase un vector unitario perpendicular a ambos. ¿Es única la solución?

13.- Se considera la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Hállese de un punto P de ella y un vector de su dirección.

14.- Sea d una distancia en un conjunto no vacío X. Definamos la aplicación $d' : X \to R$ como

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \forall x,y \in X$$

Demuéstrese que d' es una distancia.

15.- Hállese la ecuación del plano π, que pasa por el punto P(1,2,3), es perpendicular a

$$\pi' \equiv x + y - 3z + 2 = 0$$

y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = -t \end{cases}$$

16.- Se considera el plano

$$\pi \equiv x - 3y + z + 5 = 0$$

Hállese su ecuación normal y la distancia del origen a dicho plano.

17.- Hállese la ecuación del plano π, al que pertenecen los puntos $A(1,2,3)$, $B(-2,-3,5)$ y que es perpendicular al plano $\pi' \equiv x - y - z + 5 = 0$.

18.- Calcúlese la distancia del punto P(1,2,3) a la recta

$$\frac{x-3}{3} = y - 1 = z$$

19.- Hállese la ecuación del plano π, que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = y = z + 4$$

y es perpendicular al plano

$$\pi' \equiv 2x - y - z + 5 = 0$$

20.- Se consideran las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-2}{2}$$

y

$$r' \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = -3t + 4 \end{cases}$$

y los planos

$$\pi \equiv x + 3y - z + 2 = 0 \text{ y } \pi' \equiv x + 4y + 3z - 7 = 0$$

Hállense los ángulos de r y r', de r y π y de π y π'.

21.- Hállense las ecuaciones de la recta r, que se apoya en las rectas

$$s \equiv \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -3t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

y

$$t \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z+5}{2}$$

y que es paralela a la recta

$$l \equiv x = y = \frac{z+5}{-2}$$

22.- Calcúlese la distancia entre las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{5} = y = z - 1$$

y

$$s \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

23.- Hállense las ecuaciones de la recta sobre la que se mide la distancia entre las rectas del ejercicio anterior (o, lo que es igual, hállense las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas del ejercicio anterior).

24.- Hállese el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto del plano

$$\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$$

25.- Hállese el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de la recta

$$x = y = \frac{z+5}{3}$$

26.- Hállese la proyección de P(1,2,3) sobre el plano

$$\pi \equiv x - 2y + z - 8 = 0$$

según la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = y = z - 1$$

27.- Hállese un punto de la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$$

que equidiste de los planos

$$\pi \equiv x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$$

y

$$\pi' \equiv 3x - 4z + 1 = 0$$