CAPÍTULO 10

EL TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

1.- INTRODUCCIÓN.

El cálculo numérico está formado por un conjunto de técnicas mediante las cuales es posible formular problemas de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Hay muchos tipos de métodos numéricos, todos comparten una característica común: Invariablemente los métodos numéricos llevan a cabo un buen número de tediosos cálculos aritméticos. Esto hace que con el desarrollo de los ordenadores haya aumentado el papel de los métodos numéricos en la solución de problemas de ingeniería.

Para resolver un problema de ingeniería se pueden utilizar tres métodos:

1.- Métodos exactos o analíticos: Con frecuencia sólo pueden encontrarse soluciones para una clase limitada de problemas: Aquellos que pueden aproximarse mediante modelos lineales y los que tienen una geometría simple y pocas dimensiones. En consecuencia, las soluciones analíticas tienen valor práctico limitado ya que la mayor parte de los problemas reales no son lineales e implican formas y procesos complejos.

2.- Métodos gráficos: Usando grafos o nomogramas, los resultados no son muy precisos. Las soluciones gráficas son tediosas en extremo y difíciles de implementar. Finalmente, las técnicas gráficas están limitadas a aquellos problemas que puedan describirse usando 3 dimensiones o menos.

3.- Métodos numéricos: Hoy en día, los métodos numéricos, con el apoyo de los ordenadores, proporcionan una ayuda en cálculos complicados. Al usar el ordenador para obtener soluciones directamente, se pueden aproximar los cálculos sin tener que recurrir a suposiciones de simplificación o técnicas deficientes. Aunque muchas suposiciones son aún extremadamente valiosas, tanto para resolver problemas, como para proporcionar una mayor comprensión de los procesos de cálculo empleados. Los métodos numéricos representan alternativas que amplían considerablemente la capacidad para afrontar y resolver problemas.

Existen un buen número de razones por las cuales se deben estudiar los métodos numéricos:

1.- Son herramientas extremadamente poderosas para la solución de problemas. Son capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes, no lineales y geométricas complicadas que son comunes en la práctica de la ingeniería y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.

2.- Muchos programas comerciales de ordenador están basados en métodos numéricos, por tanto, es imprescindible conocerlos para sacar el máximo partido a los programas.

3.- Hay casos en que un programa de ordenador no se ajusta al problema al que nos enfrentamos, conociendo los métodos numéricos y algo de programación es posible crear programas que nos sirvan a bajo coste.

4.- Son un vehículo para aprender a servirse de los ordenadores.

5.- Los métodos numéricos son un medio para reforzar la comprensión de las matemáticas, pues una función de los métodos numéricos es la de reducir las matemáticas superiores a operaciones aritméticas básicas.

Como veremos más adelante, cuando nos enfrentamos a un problema de ingeniería por medio de las simplificaciones oportunas y tras una serie de cálculos recurrentes (Algoritmos), llegaremos a resultados aceptables. Este es en general el proceso de cálculo de los métodos numéricos donde el núcleo central es el Algoritmo:

2.- ALGORITMOS

Los procedimientos matemáticos generales que vamos a aplicar a los problemas se llaman algoritmos (del árabe: Procedimiento matemático para la resolución de un problema).

La definición exacta de Algoritmo sería: “Procedimiento matemático que nos indica la serie de pasos y decisiones que vamos a tomar para la solución de un problema”.

Las características que tiene que tener un algoritmo son:

1.- FINITO: Siempre debe terminar en un número finito de pasos.

2.- DEFINIDO: Las acciones deben definirse sin ambigüedad.

3.- ENTRADAS: Debe tener una o varias entradas.

4.- SALIDAS: Debe tener una o más salidas.

5.- EFECTIVIDAD: Todas las operaciones deben ser lo suficientemente básicas para que puedan hacerse exactamente en un número determinado de tiempo.

EJEMPLO:

Encontrar la raíz cuadrada de 2 hasta cuatro decimales.

ENTRADA: x_n

ALGORITMO: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

SALIDA: x_{n+1}

x_n	$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$	x_{n+1}
$x_1 = 1$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right)$	$x_2 = 1{,}5000$
$x_2 = 1{,}5000$	$\frac{1}{2}\left(1{,}5000 + \frac{2}{1{,}5000}\right)$	$x_3 = 1{,}4167$
$x_3 = 1{,}4167$	$\frac{1}{2}\left(1{,}4167 + \frac{2}{1{,}4167}\right)$	$x_4 = 1{,}4142$ SOL.
$x_4 = 1{,}4142$	$\frac{1}{2}\left(1{,}4142 + \frac{2}{1{,}4142}\right)$	$x_5 = 1{,}4142$ SOL.

Con frecuencia encontramos que hay varios algoritmos disponibles para producir la información de salida que se requiere y debemos escoger entre ellos. Hay muchas razones para elegir un algoritmo en vez de otro, pero dos criterios obvios son: rapidez y exactitud. Hemos de consensuar estos dos criterios, pues los métodos numéricos casi siempre portan error.

El siguiente ejemplo ilustra la existencia de dos algoritmos igual de exactos pero con distinta rapidez:

Vamos a efectuar 13 x 24 = 312

Algoritmo usual

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times 13} \\ 72 \\ \underline{24} \\ 312 \end{array}$$

Algoritmo Ruso

13	R	24	
6			48
3	R	96	
1	R	192	
		312	

3.- CARACTERÍSTICAS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.

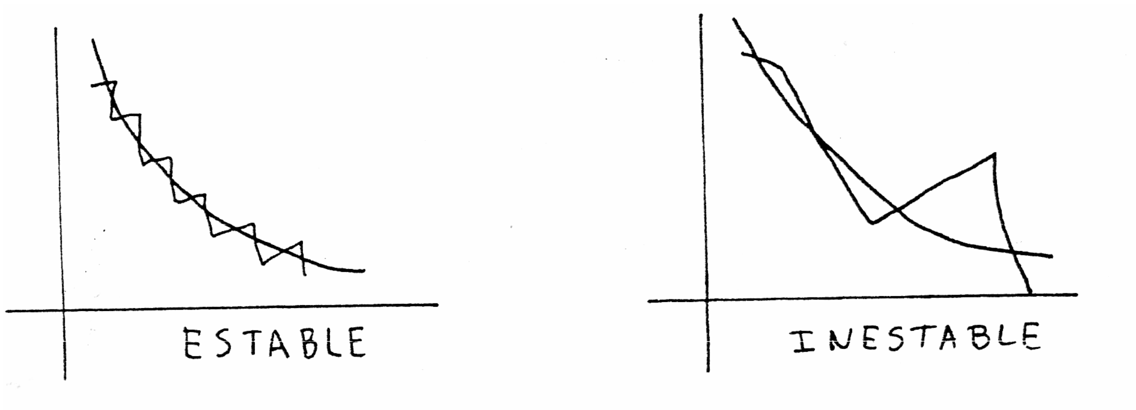
3.1.- Convergencia de un método numérico.

Un método numérico es convergente cuando su aplicación repetida genera aproximaciones más y más cercanas a la solución del problema planteado.

El ejemplo puesto de calcular la raíz cuadrada de 2 es típico de un método numérico convergente.

3.2.- Estabilidad de un método numérico.

En los cálculos prolongados, es probable que se realicen muchos redondeos. Cada uno de ellos desempeña el papel de un error de entrada para el resto del cálculo y cada uno tiene su efecto sobre la consiguiente salida. Los métodos numéricos en que es limitado el efecto acumulativo de tales errores, de modo que se genera un resultado útil, se llaman **métodos numéricos estables**. Desafortunadamente, hay ocasiones en que la acumulación es devastadora y la solución está colmada de errores. Es innecesario decir que estos métodos se denominan **inestables**.



3.3.- Errores en los métodos numéricos.

En general, en la información de entrada a un método numérico, habrá datos inexactos, pues suelen originarse en procesos de medida. Además, el propio algoritmo introduce error, quizá redondeos inevitables. La información de salida contendrá entonces errores generados por ambas fuentes.

Los métodos numéricos deben intentar generar salidas lo más exactas posibles, por lo menos con errores acotados, y para ello es necesario conocer los siguientes conceptos:

EXACTITUD: se refiere a la cercanía de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa.

PRECISIÓN: se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad, a esto se refiere cuando se habla de doble precisión, dependiendo de la máquina que estemos utilizando.

ERRORES INHERENTES O HEREDADOS: son errores en los valores numéricos con que se va a operar, pueden deberse a dos causas: sistemáticos o accidentales.

ERRORES SISTEMÁTICOS: debidos a la imprecisión de los aparatos de medición.

ERRORES ACCIDENTALES: debidos a la apreciación del observador y otras causas.

ERROR DE TRUNCAMIENTO: se debe a la interrupción de un proceso matemático antes de su terminación. Sucede cuando se toman sólo algunos términos de una serie infinita o cuando se toma sólo un número finito de intervalos. Un caso adicional de error de truncamiento ocurre cuando una calculadora poco sofisticada sólo toma en cuenta los dígitos que caben en la pantalla y no analiza el primer dígito perdido.

ERROR DE REDONDEO: debido a las limitaciones propias de la máquina que se utilice para representar cantidades que requieren un gran número de dígitos.

Redondeo de números: Considérese un número **a** aproximado o exacto escrito en sistema decimal. Con frecuencia se precisa redondear este número, es decir, reemplazarlo por un número $\mathbf{a_1}$ que tenga un número menor de dígitos significativos. El número $\mathbf{a_1}$ se elige de forma que el error de redondeo $|a_1 - a|$ sea mínimo.

Regla de redondeo: Para redondear un número a **n** dígitos significativos, elimínense todos los dígitos a la derecha del dígito significativo del lugar **n**, o reemplázeselos por ceros si estos ceros son necesarios para mantener un valor relativo. Al ejecutar esta operación, obsérvese lo siguiente:

(1) Si el primero de los dígitos despreciados es menor de 5, déjense como están los dígitos restantes.

(2) Si el primer dígito despreciado excede de 5, añádase uno al último dígito de los que quedan.

(3a) Si el primer dígito despreciado es exactamente 5 y hay dígitos no cero entre los despreciados, añádase una unidad al último dígito conservado.

(3b) Si el primer dígito despreciado es exactamente 5 y el resto de los dígitos despreciados son cero, el último dígito conservado se deja tal como está si es par y se incrementa en una unidad si es impar **(regla del dígito par).**

Es evidente que al aplicar la regla del redondeo, el error de redondeo no excede de media unidad del orden del último dígito significativo decimal conservado.

Ejemplo 1.- Sea el número pi = 3.1415926535… y efectuaremos los siguientes redondeos:

- para cuatro decimales se obtiene 3.1416 error inferior a ½ $\cdot 10^{-4}$
- para tres decimales se obtiene 3.142 error inferior a ½ $\cdot 10^{-3}$
- para dos decimales se obtiene 3.14 error inferior a ½ $\cdot 10^{-2}$

Ejemplo 2.- Redondeando el número 1.2500 a dos dígitos significativos se obtiene 1.2 (redondeo a un decimal) con error absoluto igual a ½ $\cdot$ 10^{-1} = 0.05

ERROR ABSOLUTO: es la diferencia entre el valor de un número y si valor aproximado. Sea **y** = valor real, **y*** = valor aproximado, **e_y** = error absoluto.

$e_y = |y - y^*|$

ERROR RELATIVO: es el cociente del error absoluto entre el valor real.

$$r_y = \frac{e_y}{y} = \frac{|y - y^*|}{y} \text{ para todo } y \neq 0.$$